Utsatt Eksamen ECON1100 - Høst 2025

Oppgave 1 (15 poeng)
Finn de førsteordens partiellderiverte av følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

(a) $f(x, y) = 3x^2y - 5y^3 + 4x$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$

(c) $f(x, y) = e^{xy} + \ln(x^2 + y^2)$

Oppgave 2 (15 poeng)
Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

(a) Differensialet til $g(p, q) = p^2q + e^{pq}$ er gitt ved $dg = (2pq + q^2e^{pq})dp + (p^2 + p^2e^{pq})dq$.

(b) Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$ i et punkt $x = x_0$, så vet vi at x_0 er et vendepunkt for $f(x)$.

(c) $\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right) dx = 9$

Oppgave 3 (30 poeng)
En bedrift har produksjonsfunksjonen $Q(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, der $Q(K, L)$ er produsert kvantum, K er kapital, og L er arbeidskraft.

(a) Er funksjonen $Q(K, L)$ homogen? Isåfall av hvilken grad?

(b) Hva er den partielle elastisiteten til produksjon, Q, med hensyn på kapital, K?

Anta nå at prisen på kapital er r, og prisen på arbeidskraft er w. Bedriften ønsker å produsere et gitt kvantum $\bar{q}$, og den ønsker å gjøre dette så billig som mulig. De ønsker altså å minimere kostnadene $rK + wL$, gitt at produksjon er lik $\bar{q}$, altså at $Q(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha} = \bar{q}$.

(c) Sett opp Lagrange-funksjonen og utled førsteordensbetingelsene.

(d) Vis at optimalt konsum av kapital og arbeidskraft, $K^*(\bar{q}, r, w)$ og $L^*(\bar{q}, r, w)$, er gitt ved

$$K^*(\bar{q}, r, w) = \bar{q}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}\right)^{1-\alpha}$$
$$L^*(\bar{q}, r, w) = \bar{q}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\alpha}$$

(e) Den inverse etterspørselsfunksjonen for kapital, altså prisen på kapital som en funksjon av etterspurt mengde K, er en funksjon $r(K)$. Bruk etterspørselsfunksjonene i (d) til å utlede et uttrykk for r som en funksjon av K, $r(K)$.

Oppgave 4 (20 poeng)

Betrakt funksjonen $f(x, y) = x^2y + y^2$. Anta at $y = y(x)$ er implisitt definert gjennom uttrykket

$$xy + y^2 = 1 \tag{1}$$

(a) Bruk (1) til å finne et uttrykk for $y'(x)$ gjennom implisitt derivasjon.

(b) Bruk resultatet fra oppgave (a) til å finne den totalderiverte til $f(x, y)$ med hensyn på x, $\frac{df(x,y(x))}{dx}$.

Oppgave 5 (20 poeng)

Betrakt funksjonen $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 2xy + (y-1)^2$.

(a) Utled førsteordensbetingelsene og finn funksjonens stasjonærpunkter.

(b) Klassifiser stasjonærpunktene ved hjelp av andreordensbetingelsene.