Oppgave 1

a) $f'(x) = (3x-2)x$ og $f''(x) = 6x-2$

b) $g'(y) = e^{3y^2}y$ og $g''(y) = e^{3y^2}(6y^2+1)$

c) $F'_x(x,y) = \frac{(x+y)y\ln(x+y)-xy}{(x+y)(\ln(x+y))^2}$ og $F'_y(x,y) = \frac{(x+y)x\ln(x+y)-xy}{(x+y)(\ln(x+y))^2}$

Det gir, etter en del regning:

$F_{xx}(x,y) = \frac{2xy-(x+2y)y\ln(x+y)}{(x+y)^2(\ln(x+y))^3}$ og $F_{yy}(x,y) = \frac{2xy-(y+2x)x\ln(x+y)}{(x+y)^2(\ln(x+y))^3}$

(Noter at studenter som innser at problemet er symmetrisk for x og y og dermed kun viser utregning for den ene varianten (og skriver ned svaret for den andre) skal få rett for det.

d) F er definert så lenge $x+y>0$.

(I denne oppgaven bør deloppgave c vektlegges mer i sensuren enn de andre oppgavene).

Oppgave 2

a) Her er (i) sant. Dersom det finnes et indre stasjonært punkt c, altså der $F'(c) = 0$, så må den deriverte ha forskjellig fortegn på hver side av punktet c. Dersom F er konkav, må den deriverte være positiv til venstre og negativ til høyre for c, og c er et indre globalt maksimumspunkt.

b) Her er (iii) sant. Dette er definisjonen av homogenitet (av grad k).

c) Her er (iii) sant. Vi finner enkelt den deriverte, og ser at den er negativ hvis telleren er negativ. Det gir at $\ln y - 1 \leq 0 \Rightarrow y \leq e$. Dermed er g først avtakende, så stigende.

d) Her er (iii) sant. Vi kan se dette ved å skrive om:

$$\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = (x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$\to G(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

Det gir oss at $G(tx, ty) = (tx)^{\frac{1}{4}}(ty)^{\frac{1}{4}} = t^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = t^{\frac{1}{2}}G(x, y)$

Oppgave 3

a) De som innser at elastisiteten her er potensen, får uttelling for det. Da vet de enkelt at:

$$El_x f(x, y) = El_y f(x, y) = 2 \tag{1}$$

Vi kan vise det enkelt (for eksempel for x):

$$El_x f(x, y) = \frac{x}{x^2y^2} 2xy^2 = 2$$

Tilsvarende for y.

b) Vi bruker formelen:

$$El_x g(x, y) = \frac{x}{(\ln(x + y))^2} \frac{2\ln(x + y)}{x + y} = \frac{2x}{x + y} \ln(x + y)$$

Tilsvarende finner vi:

$$El_y g(x, y) = \frac{y}{(\ln(x + y))^2} \frac{2\ln(x + y)}{x + y} = \frac{2y}{x + y} \ln(x + y)$$

c) Vi kan bruke regelen rett frem:

$$El_x F(x, y) = \frac{x}{e^{x^2y^2}} (2xy^2 e^{x^2y^2} = 2x^2y^2$$

Tilsvarende:

$$El_y F(x, y) = \frac{y}{e^{x^2y^2}} (2yx^2 e^{x^2y^2} = 2x^2y^2$$

Alternativt kan vi bruke kjerneregelen for elastisitering:

$$El_x F(x,y) = El_z e^z El_x z$$

der $z = f(x,y)$. Da får vi:

$$El_x F(x,y) = 2\frac{f}{e^f}e^f = 2f = 2x^2y^2$$

Og tilsvarende utregning for y.

d) Her gjelder det å huske at multiplikative konstanter forsvinner fra elastisiteter. Det gjør utregningen tilsvarende enkel som i a, og elastisiteten er potensen. Da får vi:

$$El_x G(x,y) = 1$$

$$El_y G(x,y) = 2$$

Oppgave 4

a) $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + C$

b)

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big|_0^2 e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2\ln 2} - e^0) = \frac{3}{2}$$

c)

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx$$
$$= \Big|_1^e \ln|x|$$
$$= \ln e - \ln 1 = 1$$

d) Her bør kandidatene gjennomføre polynomdivisjonen og få at:

$$x^2 : (x^2 + 1) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

Det gir:

$$\int \left(\frac{x^3}{x+1}\right) dx = \int x^2 dx - \int x dx + \int 1 dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C$$

Oppgave 5

a) Sett opp Lagrange-funksjonen:

$$\mathfrak{L}(K, L) = wL + qK - \lambda(F(K, L) - \bar{Y})$$

Det gir førsteordensbetingelsene:

$$\mathfrak{L}'_K(K, L) = q - \lambda F'_K(K, L) = 0$$
$$\mathfrak{L}'_K(K, L) = w - \lambda F'_L(K, L) = 0$$

b) Ved å finne λ fra begge førsteordensbetingelsene og sette de like hverandre får vi:

$$\lambda = \frac{q}{F'_K(K,L)} = \frac{w}{F'_L(K,L)}$$
$$\Rightarrow qF'_L(K,L) = wF'_K(K,L)$$

c) K og L er bundet sammen med parameterne w og q gjennom en likning hvor vi ikke kan finne et eksplisitt uttrykk. Dermed vil de optimale valgene av K og L være avhengige av verdiene av q og w (og $\bar{Y}$)) d) Ved bruk av implisitt derivasjon får vi:

$$\begin{aligned} F'_K + w\left(F''_{KK}\frac{\partial K}{\partial w} + F''_{KL}\frac{\partial L}{\partial w}\right) &= q\left(F''_{LK}\frac{\partial K}{\partial w} + F''_{LL}\frac{\partial L}{\partial w}\right) \\ \frac{\partial K}{\partial w}\left(wF''_{KK} - qF''_{LK}\right) &= \left(qF''_{LL} - wF''_{KL}\right)\frac{\partial L}{\partial w} - F_K \\ \frac{\partial K}{\partial w} &= \frac{\left(qF''_{LL} - wF''_{KL}\right)\frac{\partial L}{\partial w} - F_K}{wF''_{KK} - qF''_{LK}} \end{aligned}$$

Dette er nok for full uttelling. Resten av fasitsvaret er tilleggsinformasjon som ikke er spurt etter. Litt reorganisering gir et enklere svar å tolke fortegnet til:

$$\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{F'_K - (qF''_{LL} - wF''_{KL})\frac{\partial L}{\partial w}}{qF''_{LK} - wF''_{KK}}$$

Vi vet at $F'_K > 0, F''_{KK} < 0, F''_{LL} < 0$, og så lenge de to innsatsfaktorene er *teknisk komplementære*, så er $F''_{KL} > 0$. Da vet vi at nevneren alltid er positiv, slik at fortegnet avhenger av fortegnet til telleren. Telleren er bare positiv dersom:

$$F'_K > (qF''_{LL} - wF''_{KL})\frac{\partial L}{\partial w}$$

Slik at dersom $\frac{\partial L}{\partial w} < 0$ (som er naturlig), så vil K kun øke dersom marginalavkastningen av en ekstra enhet K i produksjonen er større enn tapet av enheter fra alle de inframarginale enhetene av K som følge av komplementariteten mellom K og L. Noter at tolkningen ikke er spurt etter her (men er skrevet ned for fremtidige studenter). Noter også at en annen nærliggende variant er å først skrive betingelsen i c som "MTB=faktorprisforhold", og heller implisitt derivere:

$$\frac{F'_L(K,L)}{F_K(K,L)} = \frac{w}{q}$$

Dette vil resultere i uttrykket:

$$\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{(F'_K)^2 + q(F'_L F''_{KL} - F'_K F''_{LL})\frac{\partial L}{\partial w}}{q(F'_K F''_{LL} - F'_L F''_{KK})}$$

Dette er akkurat det samme, som man kan se ved å dele på F'_K i teller og nevner, og sette inn for tangeringsbetingelsen.

d) Vi får at:

$$w\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = q(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

e) Ved å kombinere svaret i d med randbetingelsen, får vi:

$$\begin{aligned} L &= \frac{q}{w}\frac{1-\alpha}{\alpha}K \\ \rightarrow K^{\alpha} &\left(\frac{q}{w}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \bar{Y} \\ K &= \left(\frac{w}{q}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \bar{Y} \end{aligned}$$

f) Vi får nå at:

$$\frac{\partial K}{\partial w} = (1-\alpha)w^{-\alpha}\left(\frac{1}{q}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\bar{Y} > 0$$