

# UNIVERSITETET I OSLO ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON2200 – Matematikk 1 / Mikro 1

*Exam: ECON2200 – Mathematics 1 / Microeconomics 1*

Eksamensdag: Onsdag 25. mai 2005  
*Date of exam: Wednesday, May 25, 2005*

**Sensur kunngjøres: Onsdag 15. juni**  
***Grades will be given: Wednesday, June 15***

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00  
*Time for exam: 9:00 a.m. – 3:00 p.m.*

Oppgavesettet er på 6 sider  
*The problem set covers 6 pages*

***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:

- Ingen tillatte hjelpemidler

*Resources allowed:*

- *No resources allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

*The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.*

## Oppgave 1

- Hvis  $f(K) = (K^3 + 1)^2$ , finn  $f'(K)$ .
- Finn et uttrykk for  $\frac{dU}{dK}$  når  $U = F(K, L)$  og  $L = f(K)$ .
- Hvis  $y$  er gitt implisitt som en funksjon av  $x$  ved likningen  $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ , finn  $y'$  når  $x = y = 1$ . Finn også  $y''$  når  $x = y = 1$ .

## Oppgave 2

Betrakt problemet:

$$\max \sqrt{K} + \sqrt{L} \text{ når } 2K + 4L = m$$

- Bruk Lagranges metode til å finne de verdiene  $K = K^*$  og  $L = L^*$  som løser problemet.

- b) Definer verdifunksjonen  $f^*(m) = \sqrt{K^*} + \sqrt{L^*}$ . Beregn  $\frac{df^*(m)}{dm}$  og vis at den er lik Lagrangemultiplikatoren.
- c) Besvar spørsmål a) hvis  $2K + 4L = m$  erstattes av  $rK + wL = m$ .

### Oppgave 3

En konsument har preferanser over to goder, gitt ved nyttefunksjonen  $U(x, y) = y + Ax^\alpha$ , der  $x$  og  $y$  er mengdene av de to godene.  $A$  og  $\alpha$  er konstanter, med  $A > 0$  og  $1 > \alpha > 0$ . La pris per enhet av  $y$ -varen være lik 1, mens prisen per enhet av  $x$ -varen er  $p$ . Forbrukeren har en gitt inntekt  $m$  og opptrer som en nyttemaksimerende prisfast kvantumstilpasser i begge markeder.

- Still opp konsumentens tilpasningsproblem ved hjelp av Lagranges metode, og finn etterspørselsfunksjonene. (Anta indre løsning.)
- Finn de partielle deriverte av etterspørselsfunksjonene og bruk disse til å si noe om hvordan etterspørselen etter de to varene påvirkes av at
  - inntekten  $m$  øker
  - prisen  $p$  øker
- Hvordan varierer samlet utgift til  $x$ -varen med prisen  $p$ ? Kan du fra dette si noe om hvorvidt etterspørselen etter  $x$ -varen er elastisk eller uelastisk?
- Sett  $A = 1$  og  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Hva blir etterspørselsfunksjonene med disse parameterverdiene? Finn deretter et uttrykk for den maksimale nytten som funksjon av  $p$  og  $m$ , og kall denne verdifunksjonen for  $V(p, m)$ . Vis at

$$\frac{\partial V(p, m)}{\partial p} = -\left(\frac{1}{2p}\right)^2.$$

### Oppgave 4

Vi betrakter en økonomi der det produseres to varer, i mengdene  $x_1$  og  $x_2$ . Vare 1 produseres kun ved bruk av arbeidskraft som produksjonsfaktor, betegnet  $n$ , ved produktfunksjonen

$f(n)$ . Anta at  $f(0) = 0$ ,  $\frac{df(n)}{dn} = f'(n) > 0$  og at  $\frac{d^2f(n)}{dn^2} = f''(n) < 0$ .

- Forklar i ord hva de antatte egenskapene ved produktfunksjonen  $x_1 = f(n)$  betyr.
- Utleid etterspørselsfunksjonen for arbeidskraft for denne bedriften, skrevet som  $n(w, p_1)$ , når dens eiere maksimerer overskuddet til gitt pris per enhet av ferdigvaren,  $p_1$ , og gitt lønn per enhet arbeidskraft,  $w$ . (Anta indre løsning.)
- Ved implisitt derivasjon av bedriftens tilpasningsbetingelse skal du vise hvordan etterspørselen etter arbeidskraft påvirkes av en økning i lønna  $w$ . Forklar i ord hvorfor en  $k$ -dobling av  $w$  og  $p_1$  ikke påvirker bedriftens tilpasning.

Vare 2 produseres i et kvantum  $x_2$  i en bedrift ved hjelp av arbeidskraft ( $N$ ) og energi ( $E$ ) med en produktfunksjon  $x_2 = F(N, E)$ . Vi antar at  $F(N, E)$  er strengt voksende i hver produksjonsfaktor, den har konstant skalautbytte og har avtakende marginal teknisk substitusjonsbrøk. Bedriften minimerer kostnadene for gitt produktmengde, til gitte priser på de to produksjonsfaktorene, nemlig lønn per enhet arbeidskraft ( $w$ ) og pris per enhet energi ( $q$ ).

- iv) Formuler kostnadsminimeringsproblemet til bedriften når vi antar at produktfunksjonen er gitt som  $F(N, E) = AN^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$ , der  $A$  er en positiv konstant, og utled faktorfunksjonene (eller de betingede faktoretterspørselsfunksjonene)  $N(w, q, x_2)$  og  $E(w, q, x_2)$ . Illustrer løsningen, for gitte priser, i en figur. (Anta indre løsning.)
- v) Vis at kostnadsfunksjonen,  $C(w, q, x_2)$ , når  $F(N, E) = AN^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$ , kan skrives som  $C(w, q, x_2) = \frac{2}{A}(\sqrt{wq}) \cdot x_2$ .
- vi) Uttrykk kostnadsfunksjonen som  $C(w, q, x_2) = \phi(w, q) \cdot x_2$ , der  $\phi(w, q)$  er enhetskostnadsfunksjonen, som i punkt v) er gitt som  $\phi(w, q) = \frac{2}{A}\sqrt{wq}$ . Hva er sammenhengen mellom gjennomsnittskostnad (eller enhetskostnad) og grensekostnad (eller marginalkostnad) i dette tilfellet?
- vii) Vis at  $N(w, q, x_2) = \phi_w(w, q) \cdot x_2$ , der  $\phi_w(w, q) = \frac{\partial \phi(w, q)}{\partial w}$ .
- viii) Forklar i ord hvorfor de andrederiverte av enhetskostnadsfunksjonen  $\phi(w, q)$  har følgende egenskaper:

$$\phi_{ww}(w, q) = \frac{\partial^2 \phi(w, q)}{\partial w^2} < 0, \quad \phi_{wq}(w, q) = \frac{\partial^2 \phi(w, q)}{\partial w \partial q} > 0$$

Til slutt skal vi se nærmere på hva lønna må være for at arbeidsmarkedet skal være i likevekt. Arbeidskraft blir etterspurt av de to bedriftene, i henhold til etterspørselsfunksjonene som er utledet tidligere i oppgaven, når vi antar at samlet tilbud av arbeid er eksogent gitt og lik  $M$ , samtidig som  $p_1$ ,  $q$  og  $x_2$  også er eksogent gitte størrelser. Likevektslønna, betegnet  $\tilde{w}$ , må da oppfylle likevektsbetingelsen

$$\phi_w(\tilde{w}, q) \cdot x_2 + n(\tilde{w}, p_1) = M$$

der vi for produsenten av vare 2 bruker at  $N(w, q, x_2) = \phi_w(w, q) \cdot x_2$ ; jfr. punkt vii), og etterspørselsfunksjonen for arbeidskraft for produsenten av vare 1 fra punkt ii).

- ix) Forklar i ord hva det betyr at likevektslønna kan uttrykkes som en funksjon av  $p_1, q, x_2$  og  $M$ ; dvs.  $\tilde{w} = W(p_1, q, x_2, M)$ . Ved å bruke de egenskapene som er utledet om etterspørselssammenhengene, skal du ved implisitt derivasjon av likevektsbetingelsen vise og forklare hvordan likevektslønna blir påvirket av at
- energiprisen ( $q$ ) øker partielt
  - tilbudet av arbeidskraft ( $M$ ) øker partielt

## ENGLISH VERSION

### Problem 1

- If  $f(K) = (K^3 + 1)^2$ , find  $f'(K)$ .
- Find an expression for  $\frac{dU}{dK}$  when  $U = F(K, L)$  and  $L = f(K)$ .
- If  $y$  is implicitly defined as a function of  $x$  through the equation  $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ , find  $y'$  for  $x = y = 1$ . Find also  $y''$  when  $x = y = 1$ .

### Problem 2

Consider the problem:

$$\max \sqrt{K} + \sqrt{L} \text{ when } 2K + 4L = m$$

- Use Lagrange's method to find those values  $K = K^*$  og  $L = L^*$  that solve the problem.
- Define the value function  $f^*(m) = \sqrt{K^*} + \sqrt{L^*}$ . Calculate  $\frac{df^*(m)}{dm}$  and show that it becomes equal to the Lagrange multiplier.
- Answer question a) if  $2K + 4L = m$  is replaced by  $rK + wL = m$ .

### Problem 3

A consumer has preferences over two commodities, as represented by the utility function  $U(x, y) = y + Ax^\alpha$ , where  $x$  and  $y$  are quantities of the goods.  $A$  and  $\alpha$  are constants, with  $A > 0$  and  $1 > \alpha > 0$ . Let the price per unit of the  $y$ -commodity be equal to 1, whereas the price per unit of the  $x$ -commodity is  $p$ . The consumer has a given income  $m$  and behaves as a utility-maximising price taker in both markets.

- Solve the consumer's optimisation problem by using the Lagrange's method and derive the demand functions. (Assume an interior solution.)
- Calculate the partial derivatives of the demand functions and use these to show how demand for each commodity is affected by
  - a higher income  $m$
  - a higher price  $p$
- How does the expenditure on the  $x$ -commodity depend on the price  $p$ ? Is it possible now to conclude whether the demand for the  $x$ -commodity is elastic or inelastic?
- Let  $A = 1$  and  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Derive the demand functions for these parameter values. Find then an expression for the maximised utility expressed as a function of  $p$  and  $m$ , while denoting the value function by  $V(p, m)$ . Show that  $\frac{\partial V(p, m)}{\partial p} = -\left(\frac{1}{2p}\right)^2$ .

#### Problem 4

Consider an economy where two goods are produced in quantities  $x_1$  and  $x_2$ . Good 1 is produced by using only labour as input, denoted  $n$ , according to the production function  $f(n)$ .

Suppose that  $f(0) = 0$ ,  $\frac{df(n)}{dn} = f'(n) > 0$  and  $\frac{d^2f(n)}{dn^2} = f''(n) < 0$ .

- i) Explain verbally the meaning of the assumptions about the production function  $x_1 = f(n)$ .
- ii) Derive the demand function for labour for this producer, expressed as  $n(w, p_1)$ , when maximizing profits for a given price,  $p_1$ , per unit of the final output and a given wage rate  $w$ . (Assume an interior solution.)
- iii) By implicit differentiation of the firm's optimality condition, you are asked to show how the demand for labour is affected by an increase in the wage rate  $w$ . Explain verbally why a k-doubling of  $w$  and  $p_1$  does not have any impact on the firm's optimal choice.

Good 2 is being produced in quantity  $x_2$  by a firm using labour ( $N$ ) and energy ( $E$ ) according to a production function  $x_2 = F(N, E)$ . Assume that  $F(N, E)$  is strictly increasing in each input, exhibits constant returns to scale, and has decreasing marginal technical rate of substitution. The firm is minimising its total expenditures on inputs for some fixed output, at given input prices; the wage rate ( $w$ ) and energy price ( $q$ ).

- iv) Formulate the cost minimisation problem when the production function is given as  $F(N, E) = AN^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$ , where  $A$  is a positive constant, and derive the input functions (or the conditional factor demand functions)  $N(w, q, x_2)$  and  $E(w, q, x_2)$ . Illustrate the solution, for given prices, in a diagram. (Assume an interior solution.)
- v) Show that the cost function,  $C(w, q, x_2)$ , when  $F(N, E) = AN^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$ , can be written as  $C(w, q, x_2) = \frac{2}{A}(\sqrt{wq}) \cdot x_2$ .
- vi) Write the cost function as  $C(w, q, x_2) = \phi(w, q) \cdot x_2$ , where  $\phi(w, q)$  is the unit cost function, which from v) above, is given by  $\phi(w, q) = \frac{2}{A}\sqrt{wq}$ . What is the relationship between unit (or average) cost on the one hand, and marginal cost on the other in the present situation?
- vii) Show that  $N(w, q, x_2) = \phi_w(w, q) \cdot x_2$ , where  $\phi_w(w, q) = \frac{\partial \phi(w, q)}{\partial w}$ .
- viii) Explain verbally why the second-order derivatives of the unit cost function  $\phi(w, q)$  have the following properties:

$$\phi_{ww}(w, q) = \frac{\partial^2 \phi(w, q)}{\partial w^2} < 0, \quad \phi_{wq}(w, q) = \frac{\partial^2 \phi(w, q)}{\partial w \partial q} > 0$$

As a final issue we are going to consider in some detail what the wage rate must be in order to have an equilibrium in the labour market. Labour is being demanded by the two firms, according to their demand functions derived earlier, when we assume that total labour supply is exogenously given and equal to  $M$ , while also assuming that  $p_1$ ,  $q$  and  $x_2$  are

exogeneously given in the problem. The equilibrium wage rate, denoted  $\tilde{w}$ , has to obey the equilibrium condition

$$\phi_w(\tilde{w}, q) \cdot x_2 + n(\tilde{w}, p_1) = M$$

where we use that  $N(w, q, x_2) = \phi_w(w, q) \cdot x_2$  for firm 2; cf. vii) above, and firm 1's labour demand function from ii).

- ix) Explain verbally what it means that the equilibrium wage rate can be expressed as a function of  $p_1, q, x_2$  and  $M$ ; i.e.  $\tilde{w} = W(p_1, q, x_2, M)$ . By implicitly differentiating the equilibrium condition while also using the properties derived about the labour demand functions, you are asked to show and explain how the equilibrium wage rate is affected by
- a partial increase in the energy price ( $q$ )
  - a partial increase in the labour supply ( $M$ )