UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON2200 – Matematikk 1/Mikro 1**
Exam: ECON2200 – Mathematics 1/Micro 1

Eksamensdag: Tirsdag 29. mai 2007
Date of exam: Tuesday, May 29, 2007

Sensur kunngjøres: Onsdag 20. juni
Grades will be given: Wednesday, June 20.

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00
Time for exam: 09:00 a.m. – 03:00 p.m.

Oppgavesettet er på 5 sider
The problem set covers 5 pages

English version on page 3

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Resources allowed:
- *No resources allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Oppgave 1

La $f(x) = xe^{-x} + e^{\gamma - x}$ der γ er en konstant.

a) Beregn $f'(x)$ og $f''(x)$.

b) Finn en x^* som tilfredsstiller $f'(x^*) = 0$. Drøft hvordan x* avhenger av γ.

c) Avgjør om x^* er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt.

d) Skisser grafen til $f(x)$ når $\gamma = 0$. (Hint: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.)

Oppgave 2

En monopolist står overfor en etterspørselsfunksjon $x = A - p$, der x er etterspurt kvantum til prisen p. (A er en positiv konstant.) Produksjonskostnadene til monopolisten er cx, der c er en konstant med $0 < c < A$.

a) Vis at den profittmaksimerende tilpasningen er kjennetegnet ved en monopolpris (p^m) og solgt kvantum (x^m), der $p^m = c + \frac{A-c}{2}$ og $x^m = \frac{A-c}{2}$.

b) Beregn monopolprofitten og vis hvordan denne varierer med grensekostnaden.

Myndighetene er av den oppfatning at monopolisten produserer for lite av denne varen og vil derfor få den til å selge et kvantum $x^* = A - c$ av varen gjennom en stykksubsidie.

c) For hvilken stykksubsidie vil en nå dette målet?

Oppgave 3

En bedrift produserer en vare i mengde x med produktfunksjonen $x = F(n)$, der n er anvendte arbeidstimer. Vi antar at $F(0) = 0$, $F'(n) > 0$ og $F''(n) < 0$.
Bedriften selger varen til en gitt pris p og opptrer også som prisfast kvantumstilpasser ved kjøp av arbeidstimer, med pris w per time.

a) Forklar hva de oppgitte betingelsene på produktfunksjonen betyr.
b) Gjør rede for bedriftens tilpasning når målet er å maksimere profitten. Hva er betingelsen for at bedriften vil ønske å produsere?
c) Utled bedriftens tilbudsfunksjon for varen og etterspørselsfunksjon for arbeidstimer. Vis ved derivasjon hvordan tilbudet av varen og bruken av arbeidsinnsats påvirkes av
   - en økning i produktprisen
   - en økning i timelønna
   - en proporsjonal økning i produktpris og timelønn
d) Anta at bedriften blir pålagt å betale en avgift på t kroner per enhet solgt av varen. Hva skjer om avgiften øker?
e) Vis til slutt hvordan bedriftens tilpasning påvirkes av at det innføres en skatt på profitten på $100\tau\%$, der $0 < \tau < 1$.

Oppgave 4

a) Løs problemet: $\max\limits_{x,y}\left(-x^2 - y^2 - cx - ky + xy\right)$. Her er c og k positive parametere. Du kan anta at problemet har en løsning.
b) Bruk Lagranges metode for å løse: $\max/\min\limits_{x,y}\left(-\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-y)^2\right)$ gitt at $x + y = R$. Her er $R > 0$ en konstant. Lag en figur som illustrerer løsningen for R = 1, 2 og 3. Har du funnet maksimum eller minimum? Regn ut Lagrangemultiplikatoren og drøft hvordan den varierer med R. Gi en intuitiv forklaring på hvorfor Lagrangemultiplikatoren skifter fortegn når R går fra verdier mindre enn 2 til verdier større enn 2.

Oppgave 5

En konsument har preferanser for to varer, gitt ved nyttefunksjonen $U(c_1, c_2)$. Du skal anta at denne nyttefunksjonen er tilstrekkelig deriverbar, de partielt deriverte av første orden er begge strengt positive, og den marginale substitusjonsbrøken er avtakende.
Konsumenten er prisfast kvantumstilpasser og betaler prisene p_1 og p_2 for hver enhet av de to varene, og har i utgangspunktet en gitt inntekt m som i sin helhet brukes til kjøp av de to varene.

a) Forklar hva som menes med ”marginal substitusjonsbrøk” og hva som menes med at den er avtakende.
b) Forklar hva stigningstallet til budsjettlinja uttrykker.
c) Bruk Lagranges metode til å finne tilpasningen og forklar hva som kjennetegner denne når begge varer blir konsumert.
d) Still opp de ordinære etterspørselsfunksjonene og forklar hvordan etterspørselen etter en av varene påvirkes av
   - en økning i inntekten m
   - en økning i prisen på varen selv
   - en økning i prisen på den andre varen
e) Virkningen på etterspørselen etter en vare av en prisendring kan splittes opp i en inntektseffekt og en substitusjonseffekt. Vis og forklar disse effektene i en figur.
f) Anta til slutt at konsumenten, i tillegg til inntekten m, mottar en gave i form av en viss mengde, $\bar{c}_1$, av vare 1. Forklar hvordan en slik gave vil påvirke budsjettbetingelsen og vis i en figur hvordan en økning i prisen på vare 1 nå vil kunne påvirke tilpasningen til konsumenten.

English version

Problem 1

Let $f(x) = xe^{-x} + e^{\gamma - x}$ where □is a constant.

a) Calculate $f'(x)$ and $f''(x)$.
b) Find a value x^* satisfying $f'(x^*) = 0$. Discuss how x* varies with □
c) Determine whether x^* is a local maximum or minimum.
d) Sketch the graph of f(x) when □= 0. (Hint: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ and $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.)

Problem 2

A monopolist is facing a demand function $x = A - p$, where x is demand at price p. (A is a positive constant.) Cost of production is cx, where c is a constant with $0 < c < A$.

a) Show that profit maximisation leads to a monopoly price (p^m) and output (x^m), given by $p^m = c + \frac{A-c}{2}$ and $x^m = \frac{A-c}{2}$.
b) Calculate the monopoly profit and show how this profit will vary with marginal cost.

The government argues that the monopoly produces too little, hence it wants to induce the monopolist to sell an amount given by, $x^* = A - c$, by granting a subsidy per unit output.

c) Calculate the subsidy that is required to reach this target.

Problem 3

A firm is producing x units of a good by means of the production function $x = F(n)$, where n is number of man-hours. We assume that $F(0) = 0$, $F'(n) > 0$ and $F''(n) < 0$. The firm is selling its output at a given price p and also acts as a price taker in the market for man-hours, by paying a price w per hour.

a) Explain what the given assumptions on the production function imply.
b) Show how the firm will behave when its objective is to maximise profit. Which condition must be satisfied in order that the firm wants to produce?
c) Derive the firm's supply function for the output and the demand function for the input. Show by means of differentiation how output supply and input demand will be affected by
   - an increase in the product price
   - an increase in the wage rate
   - a proportional increase in product price and wage rate
d) Suppose that the firm is required to pay a unit tax equal to t kroner per unit of the output sold. What will happen if the tax increases?
e) Finally, you are asked to show how the firm's behaviour will be affected by a tax on profit, at a tax rate equal to $100\tau\%$, where $0 < \tau < 1$..

Problem 4

a) Solve the problem: $\max_{x,y}\left(-x^2 - y^2 - cx - ky + xy\right)$, where c and k are positive parameters. You can assume that the problem has a solution.

b) Use Lagrange's method to solve: $\max_{x,y}/\min\left(-\frac{1}{2}(1-x)^2-\frac{1}{2}(1-y)^2\right)$ subject to $x+y=R$, where $R>0$ is a constant. Draw a figure illustrating the solution for R = 1, 2 and 3. Is it a maximum or a minimum? Calculate the Lagrange multiplier and discuss how it varies with R. Give an intuitive explanation for why the Lagrange multiplier changes sign when R goes from values less than 2 to values greater than 2.

Problem 5

A consumer has preferences for two goods, represented by a utility function $U(c_1, c_2)$. Assume that this utility function is sufficiently differentiable with strictly positive partial derivatives of the first order and with decreasing marginal rate of substitution. The consumer is a price taker and is facing prices p_1 and p_2 per unit of the two goods, and has, as a point of departure, a given income m that is fully spent on the two goods.

a) Explain what is meant by "the marginal rate of substitution" and what it means by it being decreasing.
b) Provide an interpretation of the slope of the budget line.
c) Use Lagrange's method to derive the consumer's behaviour and explain its properties when both goods are consumed.
d) Formulate the ordinary demand functions and explain how demand for one of the goods will be affected by
    - an increase in the income m
    - an increase in the own price of the good
    - an increase in the price of the other good
e) The effect on demand for a good of a price change can be decomposed into an income effect and a substitution effect. Show and explain these effects by means of illustrations or diagrams.
f) At last let us assume that the consumer in addition to the income m receives a gift consisting of a certain amount $\bar{c}_1$, of good 1. Explain how such a gift will affect the budget constraint and illustrate by help of a diagram how an increase in the price of good 1 may affect the behaviour of the consumer.