UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON2200 - Matematikk 1/Mikro 1
Exam: ECON2200 – Mathematics 1/Microeconomics 1

Eksamensdag: Fredag 21. mai 2010
Date of exam: Friday May 21, 2010

Sensur kunngjøres: Fredag 11.06.2010
Grades will be given: Friday June 11, 2010

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00
Time for exam: 09:00 a.m. – 03:00 p.m.

Oppgavesettet er på 7 sider
The problem set covers 7 pages

English version on page 5

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Resources allowed:
- *No resources allowed*

Ved sensuren teller oppgave 1, 2 og 4 12% hver, oppgave 3 6%, oppgave 5 og 6 17% hver, oppgave 7 9% og oppgave 8 15%.

Question 1, 2 and 4 count 12% each, question 3 counts 6%, question 5 and 6 count 17% each, question 7 counts 9% and question 8 counts 15% in the evaluation

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Oppgave 1 (12 %)

Deriver følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter

(a) $f(x) = 3x^2 - 3x^{-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(c) $f(x) = F(g(x), h(x))$

(d) $f(x) = e^{-2x}$

(e) $h(t,s) = (t-s)^2 + (t+s)^{-2}$

(f) Finn den femtederiverte av funksjonen i (d).

Oppgave 2 (12 %)

For hver av påstandene nedenfor, avgjør om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

(a) $\dfrac{x + \ln y - 3}{x - 3} = 1 + \dfrac{\ln y}{x-3}$

(b) $e^{3+2\ln x} = \left(3x\right)^2$

(c) Dersom $g(r) = \max_x \left(rx - x^2\right) = rx^*(r) - \left(x^*(r)\right)^2$, så er $g'(r) = x^*(r)$. Her er $x^*(r)$ den optimale verdien av x gitt r.

(d) Ta utgangspunkt i følgende sanne opplysning: Funksjonen $f(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5xy - 10y$ har et stasjonærpunkt i $x = 2$ og $y = 0$. Du skal ta stilling til følgende: Punktet er et minimumspunkt.

Oppgave 3 (6 %)

Maksimer $x + 3y$ gitt bibetingelsen $\ln x + \ln y = \ln 12$ ved hjelp av Lagranges metode.

Oppgave 4 (12 %)

Betrakt en bedrift som produserer en produktmengde *x* med kostnadsfunksjonen

$c(x) = \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{x}{1+x}$.

(a) Vis at funksjonen er voksende for alle positive *x*, at den er konkav for små positive *x* og konveks for større verdier av *x*. Finn vendepunktet, både *x*-verdien og funksjonsverdien.

(b) Vis at gjennomsnittskostnaden er avtakende for små positive *x* og voksende for større verdier av *x*. Finn minimumspunktet, både *x*-verdien og den tilhørende gjennomsnittskostnaden.

Fortsetter på neste side

(c) Finn bedriftens tilbudsfunksjon i frikonkurranse på invers form, dvs. en likning der p som funksjon av x beskriver tilbudet, sammen med en ulikhet som gir betingelsen for at bedriften ønsker å tilby $x > 0$.

Oppgave 5 (17 %)

Betrakt de to produktfunksjonene $x = f(n,k) = An^{1/4}k^{1/5}$ og $x = g(n,k) = Bn^{1/2}k^{2/5}$, der A og B er positive konstanter. Anta at de to innsatsfaktorene kan kjøpes til konstante faktorpriser w og q.

(a) Finn en formel for isokvantene for f-funksjonen. Vis at for hver x gir formelen oss k som en avtakende, konveks funksjon av n.

(b) Finn en formel for isokvantene for g-funksjonen.

(c) Hva blir $f(1,1)$? Hva blir $g(1,1)$? Finn formler for de to isokvantene, for f-funksjonen og g-funksjonen, som går gjennom punktet $n = 1$, $k = 1$.

(d) Drøft de to påstandene: "Isokvanten for f-funksjonen og isokvanten for g-funksjonen er de samme for hver verdi av x." "Isokvanten for f-funksjonen og isokvanten for g-funksjonen er de samme når $x = \frac{A^2}{B}$."

(e) Finn formler for substitumalene for de to produktfunksjonene, og drøft om de to substitumalene er like.

(f) Drøft påstanden: "Substitumalene består av de (n,k)-punktene som minimerer kostnadene for en gitt x. For enhver gitt x vil samme kombinasjon av n og k minimere kostnadene for f-funksjonen og for g-funksjonen."

Oppgave 6 (17 %)

(a) Forklar hva som menes med en indifferenskurve for en konsument og en tilhørende marginal substitusjonsbrøk. Hva betyr antakelsen om avtakende marginal substitusjonsbrøk?

(b) La nyttefunksjonen til en konsument være gitt ved $U(x,y) = y + q \times \ln x$, der (x,y) er en kombinasjon av to konsumerte varer, med q som en positiv konstant. Anta at konsumenten har en gitt inntekt m, med p som pris per enhet av x-varen, og med pris på y-varen lik én. (Konsumenten er prisfast kvantumstilpasser i begge markedene.) Gjør rede for tilpasningen til en konsument med den spesifiserte nyttefunksjonen ved hjelp av Lagranges metode. Finn etterspørselsfunksjonene for de to varene. Hvordan blir løsningen påvirket av om $m \geq \theta$?

(c) Hva blir virkningen på etterspurt kvantum for hver av de to varene av at
- prisen p øker
- inntekten m øker

(d) Beregn Cournot- og Engelelastisiteter, samt varenes budsjettandeler. Hva kan du si om substitusjons- og inntektsvirkningen for x-varen av en økning i prisen p?

Fortsetter på neste side

(e) I tillegg til inntekten m har konsumenten nå en gitt beholdning av *x*-varen, $\bar{x}$, som kan omsettes til prisen p. Finn tilpasningen til konsumenten i dette tilfellet, og vis hvordan tilpasningen påvirkes av at
- prisen *p* øker
- beholdningen $\bar{x}$ øker

(f) Finn et uttrykk for den maksimerte nytten fra (e), d.v.s. den indirekte nyttefunksjonen, og vis hvordan denne påvirkes av en økning i prisen *p*. Gi en tolkning av resultatet.

Oppgave 7 (9 %)

Du skal analysere markedslikevekten for en vare som produseres av *n* identiske produsenter, hver med en stigende tilbudsfunksjon $s(p)$, der *p* er prisen for varen. Videre har vi *N* identiske kjøpere (eller etterspørrere), hver med en fallende etterspørselsfunksjon $D(p)$.

(a) Forklar hvorfor vi kan skrive likevektsprisen som $p(n, N)$.
(b) Hvordan påvirkes likevektspris og tilhørende likevektskvantum av at antall produsenter (n) øker?
(c) Hvordan påvirkes likevektspris og likevektskvantum av at antall kjøpere (N) øker?

Oppgave 8 (15 %)

En produsent har en gitt mengde av en vare som kan selges i ett marked der produsenten er monopolist og er stilt overfor en fallende etterspørselsfunksjon.

(a) Hva er betingelsen for at den profittmaksimerende monopolisten vil selge hele det tilgjengelige kvantum av varen?

Anta at varen, som fremdeles foreligger i et gitt kvantum, nå kan selges i to atskilte markeder, der hvert marked har en fallende etterspørselsfunksjon.

(b) Hva kjennetegner den profittmaksimerende fordelingen av det gitte kvantumet mellom de to markedene?
(c) Anta at monopolisten kan øke tilgangen av varen ved hjelp av en teknologi med konstant grensekostnad. Hva vil den profittmaksimerende monopolisten legge til grunn som kriterium for hvorvidt produksjonen bør økes?
(d) Hvordan vil beslutningen i foregående punkt bli påvirket dersom det også påløper en fast kostnad knyttet til å øke mengden ut over den som først var tilgjengelig?

ENGLISH VERSION

Problem 1 (12 %)

Differentiate the following functions with respect to all arguments

(a) $f(x) = 3x^2 - 3x^{-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(c) $f(x) = F(g(x), h(x))$

(d) $f(x) = e^{-2x}$

(e) $h(t,s) = (t-s)^2 + (t+s)^{-2}$

(f) Find the fifth derivative of the function in (d).

Problem 2 (12 %)

For each statement below, decide whether it is true or false. Explain your answer.

(a) $\dfrac{x + \ln y - 3}{x-3} = 1 + \dfrac{\ln y}{x-3}$

(b) $e^{3+2\ln x} = \left(3x\right)^2$

(c) If $g(r) = \max_x \left(rx - x^2\right) = rx^*(r) - \left(x^*(r)\right)^2$, then $g'(r) = x^*(r)$. Here $x^*(r)$ is the optimal value of x given r.

(d) Start from the following true statement: The function $f(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5xy - 10y$ has a stationary point in $x = 2$ and $y = 0$. You should decide on the following statement: The point is a minimum point.

Problem 3 (6 %)

Maximize $x + 3y$ subject to $\ln x + \ln y = \ln 12$ by means of Lagrange's method.

Problem 4 (12 %)

Consider a firm producing a quantity *x* with the cost function $c(x) = \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{x}{1+x}$.

(a) Show that the function is increasing for all positive *x*, that it is concave for small positive *x* and convex for larger values of *x*. Find the inflection point, both the *x* value and the function value.

(b) Show that the average cost is decreasing for small positive *x* and increasing for larger values of *x*. Find the minimum point, both the *x* value and the corresponding average cost.

Continues on the next page

(c) Find the firm's supply function in a competitive market, on inverse form, i.e., an equation in which p as function of x describes the supply, together with an inequality which gives the condition for the firm to wish to supply $x > 0$.

Problem 5 (17 %)

Consider the two production functions $x = f(n,k) = An^{1/4}k^{1/5}$ and $x = g(n,k) = Bn^{1/2}k^{2/5}$, where A and B are positive constants. Assume that the two input factors can be bought at constant factor prices w and q.

(a) Find a formula for the isoquants of the f function. Show that for each x, the formula gives us k as a decreasing, convex function of n.

(b) Find a formula for the isoquants of the g function.

(c) What is $f(1,1)$? What is $g(1,1)$? Find formulae for the two isoquants, for the f function and the g function, going through the point $n = 1$, $k = 1$.

(d) Discuss the two statements: "The isoquant of the f function and the isoquant of the g function are the same for each value of x." "The isoquant of the f function and the isoquant of the g function are the same when $x = \frac{A^2}{B}$."

(e) Find formulae for the expansion paths for the two production functions, and discuss whether the two expansion paths are equal.

(f) Discuss the statement: "The expansion paths consist of those (n,k) points which minimize costs for a given x. For each given x the same combination of n and k will minimize the costs for the f function and for the g function."

Problem 6 (17 %)

(a) Explain what is meant by an indifference curve for a consumer and its corresponding marginal rate of substitution. What is meant by the assumption of a decreasing marginal rate of substitution?
(b) Let the utility function of a consumer be given by $U(x,y) = y + q \times \ln x$, where (x,y) is a combination of two consumed commodities, with q being a positive constant. Assume that the consumer has a given income m, with p as the price per unit of the x commodity, and with the price of the y commodity equal to unity. (The consumer takes prices as given in both markets.) Discuss the behavior of a consumer with the specified utility function by means of Lagrange's method. Find the demand functions for the two commodities. How is the solution affected by whether $m \geq \theta$?
(c) What is the effect on demanded quantity for each of the two commodities of
- an increase in the price p
- an increase in the income m

Continues on the next page

(d) Compute the Cournot and Engel elasticities, and the budget shares of the commodities. What can you say about the substitution and income effects for the *x* commodity of an increase in the price *p*?
(e) In addition to the income m, the consumer now has a given stock of the *x* commodity, $\bar{x}$, which can be sold at price p. Find the behavior of the consumer in this case, and show how the behavior is affected by
  - an increase in the price *p*
  - an increase in the stock $\bar{x}$
(f) Find an expression for the maximized utility from (e), i.e., the indirect utility function, and show how this is affected by an increase in the price *p*. Give an interpretation of the result.

Problem 7 (9 %)

You are asked to analyze the market equilibrium for a commodity that is produced by *n* identical producers, each with an increasing supply function $s(p)$, where *p* is the price of the commodity. Moreover there are *N* identical buyers (or demanders), each with a decreasing demand function $D(p)$.

(a) Explain why the equilibrium price can be written as $p(n, N)$.
(b) How are the equilibrium price and the corresponding equilibrium quantity affected by an increase in the number of producers, (n)?
(c) How are the equilibrium price and quantity affected by an increase in the number of buyers (N)?

Problem 8 (15 %)

A producer has a given quantity of a commodity which can be sold in one market in which the producer is a monopolist, facing a decreasing demand function.

(a) What is the condition for the profit maximizing monopolist to wish to sell all of the available quantity of the commodity?

Assume that the commodity, which is still available in a given quantity, now can be sold in two separate markets, each market having a decreasing demand function.

(b) What characterizes the profit maximizing distribution of the given quantity between the two markets?
(c) Assume that the monopolist can increase the availability of the commodity by means of a technology with constant marginal cost. What criterion will be used by the profit maximizing monopoly in deciding whether to increase production?
(d) How is the decision in the previous point affected if there is also incurred a fixed cost related to increasing quantity above the level which was available at the outset?