UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON2200 – Matematikk 1/ Mikro 1
Exam: ECON2200 – Mathematics 1/ Microeconomics 1

Eksamensdag: 23.05.2011 **Sensur kunngjøres: 10.06.2011**
Date of exam: 23.05.2011 ***Grades will be given: 10.06.2011***

Tid for eksamen: kl. 09.00 – 15.00
Time for exam: 09.00 – 15.00

Oppgavesettet er på 8 sider
The problem set covers 8 pages ***English version on page 5***

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Resources allowed:
- *No resources allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

BOKMÅL

Oppgave 1 (vekt 11%)
Deriver følgende funksjoner med hensyn på alle variabler.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x^{-2}$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = \ln(x + e^x)$

d) $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$

e) $F(x, y) = x^2 y$

f) Finn de andreordensderiverte til funksjonen $F(x, y) = \ln(f(x)g(y))$

g) Finn $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ og $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ når $z = x^2 + \ln y$, $x = t - s$ og $y = t + s$

Oppgave 2 (vekt 10%)

Sant eller galt?
Gjelder følgende påstander generelt (for alle verdier av x og y der funksjonene er veldefinerte)?

a) $\ln(x+2y) = \ln x + \ln y^2$

b) $e^{2\ln x + 3} = x^2 e^3$

c) $\sum_{i=0}^{5} (i+1) = 15$

d) $\frac{\ln x^2}{\ln x} = 2$

e) $\frac{5x+3y}{x+y} = 5 - \frac{2y}{x+y}$

Oppgave 3 (vekt 15%)
En monopolist selger et produkt i to ulike markeder. Han vil da oppnå en pris $p_1(x_1) = A - ax_1$ om han selger et kvantum x_1 i marked 1 og en pris $p_2(x_2) = B - bx_2$ om han selger et kvantum x_2 i marked 2. Bedriftens kostnadsfunksjon er $c(x_1 + x_2)$.

a) Vis at den totale profitten blir $\pi(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 - ax_1^2 - bx_2^2 - c(x_1 + x_2)$.

b) Finn et sett ligninger som karakteriserer den profittmaksimerende omsetningen

c) Hvilke betingelser må vi legge på $c(x_1 + x_2)$ for å være sikre på at løsningen i b) faktisk er et profittmaksimum?

Anta nå at bedriften er prisfast kvantumstilpasser i de to markedene, og at prisene i markedene er p_1 og p_2.

d) Under hvilke betingelser vil bedriften selge et positivt kvantum i begge markedene?

e) Hva blir den profittmaksimerende produksjonen til bedriften?

Oppgave 4 (vekt 7%)
Maksimer

$$\ln x + \ln y$$

under bibetingelsen

$$x + y^2 = 12$$

ved hjelp av Lagranges metode.

Oppgave 5 (vekt 8%)

Anta at en bedrift er prisfast kvantumstilpasser og har kostnadsfunksjonen $C(x) = K + \frac{a}{2}x^2$ der x er produktmengden, og K og a er positive konstanter. La p betegne produktprisen.

a) Finn grensekostnaden $C'(x)$
b) Finn enhetskostnaden $\bar{C}(x) = C(x)/x$
c) Finn eventuelt minimumspunkt for $\bar{C}(x)$
d) Finn tilbudsfunksjonen til bedriften.

Oppgave 6 (vekt 10%)
Anta at en bedrift produserer en mengde x ved produktfunksjonen $x = f(n,k)$, der n og k er mengdene av to innsatsfaktorer. La prisene på x,n,k være henholdsvis p,w,q, som tas som gitt av produsenten. Anta videre at bedriften får tildelt en gitt mengde av k (til prisen q) som bedriften skal bruke. Den kan altså ikke selv velge k.

a) Drøft hva bedriften vil gjøre for å maksimere profitten, og utled tilpasningsbetingelsene.
b) Analyser hvordan bedriftens tilpasning påvirkes av en økning i k.
c) Bruk omhyllingsteoremet til å analysere virkningene på profitten av
   i. en økning i k
   ii. en økning i q.

Oppgave 7 (vekt 18%)
Anta at en forbruker har full inntekt R, fritid L, arbeidstid H, forbruk c og står overfor en eksogen lønnssats w. La prisen på c være 1. Anta at forbrukeren maksimerer nyttefunksjonen $u(c,L)$.

a) Tolk $\frac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c}$.

b) Hva betyr det økonomisk sett at $\frac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c}$ avtar når L øker langs en indifferenskurve?

c) Utled forbrukerens tilpasning, og tolk optimumsbetingelsen $\frac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c} = w$.

d) Hva er den indirekte nyttefunksjonen, hvilke argumenter har den og hva forteller den oss?
e) Forklar det økonomiske innholdet i Slutsky-sammenhengen

(1) $$\frac{dL}{dw} = \frac{\partial h_L}{\partial w} + H\frac{\partial L}{\partial R}$$

og drøft fortegnet til dL/dw.
Anta at en forbruker opplever et kutt i lønnssatsen slik at $dw = -t$ (der t er positiv), men samtidig mottar et fast beløp B.

f) Drøft hvordan endringene påvirker arbeidstilbudet.

Oppgave 8 (vekt 7%)
Betrakt etterspørselsfunksjonen $x = 100 - 2p$ der p er pris og x mengde.

a) Finn priselastisiteten i etterspørselen når p=10.

Betrakt etterspørselsfunksjonen $x = \frac{m}{2p} + 2$ der m betegner inntekt.

b) Finn pris- og inntektselastisitet i etterspørselen når m=200 og p=10.

Anta at det bare kjøpes to goder i mengder x_1 og x_2 der p_1 og p_2 er de tilhørende priser.
Anta at etterspørselsfunksjonen til gode 1 er $x_1 = 100m^a p_1^{-1,5} p_2^{0,4}$ der a er en konstant.

c) Finn priselastisitetene og inntektselastisiteten i etterspørselen etter gode 1 når $m = 200$, $p_1 = 10$ og $p_2 = 5$.

Oppgave 9 (vekt 14%)
Anta for enkelhets skyld at matvarer kan deles inn i sunn og usunn mat. La x være omsatt mengde og p være prisen på usunn mat. Videre bruker vi notasjonen $E(p,\alpha)$ for etterspørsel etter usunn mat, og $T(p,\beta)$ for tilbud av usunn mat. α og β er mulige skiftparametre. Vi antar at matvaremarkedet med rimelig tilnærmelse kan beskrives som et marked med perfekt konkurranse.

a) Hvordan bestemmes da likevektsprisen på usunn mat?

Anta at det innføres merking av usunne matvarer som gjør at forbrukerne ønsker å kjøpe mindre av disse.

b) Drøft hvilken effekt du vil forvente på etterspørselen etter usunn mat, og analyser hva som bli virkningene på likevektspris og likevektskvantum i markedet.
c) Hvilke forhold bestemmer i hvilken grad tiltaket fører til sunnere kosthold?

ENGLISH VERSION

Problem 1 (weight 11%)

Differentiate the following functions with respect to all variables.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x^{-2}$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = \ln(x + e^x)$

d) $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$

e) $F(x, y) = x^2 y$

f) Find the second order derivatives of the function $F(x, y) = \ln(f(x)g(y))$.

g) Find $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ and $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ when $z = x^2 + \ln y$, $x = t - s$ and $y = t + s$.

Problem 2 (weight 10%)
True or false?

Are the following statements true in general (for all values of x and y where the functions are well defined)?

a) $\ln(x + 2y) = \ln x + \ln y^2$

b) $e^{2\ln x + 3} = x^2 e^3$

c) $\sum_{i=0}^{5} (i+1) = 15$

d) $\dfrac{\ln x^2}{\ln x} = 2$

e) $\dfrac{5x + 3y}{x + y} = 5 - \dfrac{2y}{x + y}$

Problem 3 (weight 15%)

A monopolist is selling a product in two different markets. He will then obtain a price $p_1(x_1) = A - ax_1$ if he sells a quantity x_1 in market 1 and a price $p_2(x_2) = B - bx_2$ if he sells a quantity x_2 in market 2. The cost function is $c(x_1 + x_2)$.

a) Show that the total profit will be $\pi(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 - ax_1^2 - bx_2^2 - c(x_1 + x_2)$.

b) Find a set of equations that characterise the profit-maximising sales.

c) Which conditions must we impose on $c(x_1 + x_2)$ to make sure that the solution in b) is actually a profit maximum?

Assume now that the company is a price taker in the two markets and that prices in the two markets are p_1 and p_2, respectively.

d) Under what conditions will the firm sell a positive quantity in both markets?

e) What is the firm's profit-maximising output?

Problem 4 (weight 7%)

Maximise

$$\ln x + \ln y$$

subject to the constraint

$$x + y^2 = 12$$

using Lagrange's method.

Problem 5 (weight 8%)

Assume that a firm is a price taker and has the cost function $C(x) = K + \frac{a}{2}x^2$ where *x* denotes output and *K* and *a* are positive parameters. Let *p* denote the product price.

a) Find the marginal cost $C'(x)$.

b) Find the unit cost $\bar{C}(x) = C(x)/x$.

c) Find any minimum point for $\bar{C}(x)$.

d) Find the supply function of the firm.

Problem 6 (weight 10%)

Assume that a firm produces a quantity x by means of the production function $x = f(n,k)$, where *n* and *k* are the quantities of two input factors. Let the prices of *x, n, k* be, respectively, *p, w, q,* which are taken as given by the producer. Assume further that the firm will be assigned a given amount of *k* (at price *q*) that the firm will use. It can therefore not choose *k*.

a) Dicuss what the firm will do to maximise profits and derive optimality conditions.

b) Analyse how the firm's behaviour is affected by an increase in *k*.

c) Use the envelope theorem to analyse the effects on profits of

i. an increase in *k*

ii. an increase in *q*.

Problem 7 (weight 18%)
Assume that a consumer has full income *R*, leisure *L*, working hours *H*, consumption c and faces an exogenous wage rate *w*. Let the price of c be 1. Assume that the consumer maximises the utility function $u(c, L)$.

a) Interpret $\dfrac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c}$.

b) What does it mean in economic terms that $\dfrac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c}$ decreases as *L* increases along an indifference curve?

c) Derive a characterisation of the consumer's optimal behaviour, and interpret the optimality condition $\dfrac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c} = w$.

d) What is the indirect utility function, what are its arguments and what does it tell us?

e) Explain the economic content of the Slutsky decomposition

(1) $$\frac{dL}{dw} = \frac{\partial h_L}{\partial w} + H\frac{\partial L}{\partial R}$$

and discuss the sign of dL / dw.

Assume that a consumer experiences a cut in the wage rate so that $dw = -t$ (where *t* is positive), but at the same time receives a fixed amount *B*.

f) Discuss how the changes affect labour supply.

Problem 8 (weight 7%)
Consider the demand function $x = 100 - 2p$ where *p* is price and *x* is quantity.

a) Find the price elasticity of demand when p = 10.

Consider the demand function $x = \dfrac{m}{2p} + 2$, where *m* denotes income.

b) Find the price and income elasticity of demand when *m = 200* and *p = 10*.

Assume that there are only two goods purchased in quantities x_1 og x_2 where p_1 are p_2 are the corresponding prices. Suppose the demand function for good 1 is $x_1 = 100 m^a p_1^{-1,5} p_2^{0,4}$ where *a* is a constant.

c) Find the price elasticities and income elasticity of demand for good 1 when $m = 200$, $p_1 = 10$ and $p_2 = 5$.

Problem 9 (weight 14%)
Assume for simplicity that foods can be divided into healthy and unhealthy food. Let *x* be the quantity sold and *p* be the price of unhealthy food. Furthermore, we use the notation $E(p, \alpha)$ for the demand for unhealthy food, and $T(p, \beta)$ for the supply of unhealthy food. α and β are possible shift parameters. We assume that the food market with reasonable approximation can be described as a market with perfect competition.

a) How is the equilibrium price of unhealthy food determined?

Assume that labelling of unhealthy foods is introduced, which makes consumers less keen to buy these commodities.

b) Discuss what effect you would expect on the demand for unhealthy food, and analyse effects on equilibrium price and quantity.
c) What factors determine the extent to which this policy leads to a healthier diet?