

UNIVERSITETET I OSLO ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON2200 Matematikk 1 / Mikro 1

Exam: ECON2200 Mathematics 1 / Microeconomics 1

Eksamensdag: 30.05.2012

Date of exam: 30.05.2012

Sensur kunngjøres: 13.06.2012

Grades will be given: 13.06.2012

Tid for eksamen: kl. 09.00 – 15.00

Time for exam: 09.00 – 15.00

Oppgavesettet er på 7 sider

The problem set covers 7 pages

English version on page 5.

Tillatte hjelpemidler:

- Ingen tillatte hjelpemidler

Resources allowed:

- *No resources allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

BOKMÅL

Oppgave 1 (8 poeng)

Deriver følgende funksjoner. Deriver med hensyn på begge argumenter i e) og f).

a) $f(x) = 3x^2 - x^{-1} + \ln x$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^{-1} + 3}$

c) $f(x) = e^{g(x)}$

d) $f(x) = x^2 g(x)$

e) $F(x, y) = \left(x - \frac{1}{y}\right)^2$

f) $f(s, t) = (s - t)^2 - (s + t)^{-2}$

Oppgave 2 (5 poeng) Sant eller galt?

For hver av disse påstandene, avgjør om de er sanne eller gale

a) $\sum_{i=1}^5 (3+i)^2 = \sum_{i=4}^8 i^2$

b) $\ln(3xy) = \ln(x^3) + \ln y$

c) $\frac{2x+6}{2} = x+3$

d) $e^{2\ln x} = 2x$

e) $\ln 2x - \ln 2 = \ln x$

Oppgave 3 (7 poeng).

Betrakt funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$.

- Finn stasjonærpunktet til funksjonen
- Tilfredsstiller funksjonen andreordensbetingelsen for et globalt maksimum eller minimum?

Oppgave 4 (15 poeng).

En monopolist selger i to markeder. Han selger et kvantum q_1 i marked 1 og et kvantum q_2 i marked 2. Etterspørselen er $D_1(p_1) = 2A - 2p_1$ i marked 1 og $D_2(p_2) = B - p_2$ i marked 2, der p_1, p_2 er prisene i hhv marked 1 og marked 2. Produsentens kostnader er

$$C(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2)^2$$

- Sett opp et uttrykk for produsentens profitt. Sett opp førsteordenbetingelsene for produsentens profittmaksimering, og finn optimalt kvantum og pris i begge markedene. (Anta at A og B er slik at vi har indre løsning.)
- Sett opp de tilstrekkelige betingelsene for et maksimum og sjekk om de er tilfredsstilt.

Oppgave 5 (15 poeng).

Sant eller usant? Begrunn svaret

- a) Når prisen på en vare synker, vil samlet utlegg til varen øke hvis etterspørselen er uelastisk.
- b) Den direkte substitusjonseffekten av en prisøkning vil kunne være positiv hvis varen er mindreverdige i etterspørselen.
- c) En vares budsjettandel vil alltid øke når inntekten øker.
- d) En vares budsjettandel vil øke når prisen på varen øker, bare hvis etterspørselen er uelastisk.
- e) I to-godetilfellet vil vi kunne ha at en økning i prisen på en vare vil lede til økt etterspørsel etter begge varer.

Oppgave 6 (20 poeng).

En konsument/arbeidstaker har preferanser over konsum, angitt med symbolet c , og fritid (angitt med symbolet F), gitt ved nyttefunksjonen $U(c, F) = c + \theta\sqrt{F}$, der θ er en positiv konstant. Denne nyttefunksjonen ønskes maksimert, hensyn tatt til et tidsbudsjett ($T = F + N$) og et "økonomisk" budsjett $c = wN + S$. T er tilgjengelig tid i den perioden vi betrakter, N er arbeidstid, og hver tidsenhet betales med en lønn på w kroner. S er en stønad, målt i kroner. Så vel stønad som lønn tas som gitt av konsumenten. (Prisen på konsumvaren, c , er lik 1.)

- a) Formuler konsumentens nyttemaksimering ved hjelp av Lagranges metode, når du setter inn fra tidsbudsjettet i det økonomiske budsjettet. Anta indre løsning.
- b) Utled den nyttemaksimerende kombinasjonen av goder og fritid.
- c) Hva er betingelsen for at konsumenten ønsker å arbeide? Angi med andre ord en betingelse for at problemet ikke skal ha hjørneløsning.
- d) Anta indre løsning. Hvordan påvirkes arbeidstilbudet av
 - Økt lønn
 - Høyere stønad
- e) Hvordan påvirkes konsumet c av de samme endringene som i punkt d? Kommenter dine funn i lys av generell økonomisk teori.

Oppgave 7 (30 poeng).

En bedrift produserer en vare i mengde x ved bruk av energi (angitt ved E_1) som eneste variable produksjonsfaktor på kort sikt, sammen med en gitt mengde realkapital. På kort sikt gjelder produktfunksjonen $x = f(E_1; \bar{k})$, der \bar{k} er den gitte mengden realkapital. Anta at

denne funksjonen er tilstrekkelig deriverbar med $\frac{\partial f}{\partial E_1} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2} < 0$ og anta for seinere

bruk at $\frac{\partial^2 f}{\partial k \partial E_1} > 0$.

- a) Forklar hva disse antakelsene om produktfunksjonen betyr.

Anta at denne bedriften ønsker å maksimere overskuddet når den står overfor gitte priser som prisfast kvantumstilpasser, med P som produktpris og q som pris på energi.

- b) Hva kjennetegner en profittmaksimerende tilpasning? Forklar hvorfor vi kan skrive bedriftens kortsiktige etterspørselsfunksjon for energi som $E_1(q, P, \bar{k})$?
- c) Hvordan varierer bedriftens kortsiktige etterspørsel etter energi med hhv. q , P og \bar{k} ?

En typisk konsument har preferanser over to goder; vanlig konsum (c) og energi (E_2).

Konsumenten maksimerer denne nyttefunksjonen med budsjettbetingelsen $pc + qE_2 = m$, der p er pris per enhet av c , m er inntekt, og q er pris på energi. Priser og inntekt er eksogene størrelser, og konsumenten opptrer som prisfast kvantumstilpasser i alle markeder.

- d) Forklar hvorfor konsumentens etterspørsel etter energi kan skrives som $E_2(q, p, m)$.
- e) Anta at energi er et fullverdig (normalt) gode. Hva er da virkningen på etterspørselen etter energi hos konsumenten når q øker, og når m øker?

La det nå være N slike bedrifter som beskrevet i første del av oppgaven, og M slike konsumenter som beskrevet over, i denne økonomien.

- f) Forklar hvorfor samlet etterspørsel etter energi nå kan skrives som

$$N \cdot E_1(q, P, \bar{k}) + M \cdot E_2(q, p, m).$$

- g) Anta at samlet tilbud av energi er gitt og lik \bar{Y} . Gi en begrunnelse for at den prisen som sikrer likevekt i energimarkedet kan uttrykkes som $q(\bar{Y}, p, P, \bar{k}, m, N, M)$.
- h) Hvordan påvirkes likevekten av at tilbudet av energi øker? Hva blir virkningen om antall konsumenter øker?
- i) Det innføres nå en stykkavgift på energi. Hva blir virkningen av en slik avgift på den prisen konsumentene betaler?
- j) Anta tilslutt at tilbudet av energi selv varierer positivt med prisen q , dvs. at vi har at markedstilbudsfunksjonen for energi kan skrives som $Y(q)$. Samtidig avvikles avgiften. Hva blir virkningen på likevektsprisen nå om antall konsumenter øker?

ENGLISH

Problem 1 (8 points)

Differentiate the following functions. Differentiate with respect to both arguments e) and f).

a) $f(x) = 3x^2 - x^{-1} + \ln x$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^{-1}+3}$

c) $f(x) = e^{g(x)}$

d) $f(x) = x^2 g(x)$

e) $F(x, y) = \left(x - \frac{1}{y}\right)^2$

f) $f(s, t) = (s-t)^2 - (s+t)^{-2}$

Problem 2 (5 points) True or false?

For each of these claims, determines if they are true or false

f) $\sum_{i=1}^5 (3+i)^2 = \sum_{i=4}^8 i^2$

g) $\ln(3xy) = \ln(x^3) + \ln y$

h) $\frac{2x+6}{2} = x+3$

i) $e^{2\ln x} = 2x$

j) $\ln 2x - \ln 2 = \ln x$

Problem 3 (7 points).

Consider the function $f(x) = e^{-x^2}$.

c) Find stationary points for the function.

d) Does the function satisfy second order conditions for a global maximum or minimum?

Problem 4 (15 points).

A monopolist is selling in two markets. He sells quantity q_1 in market 1 and quantity q_2 in market 2. Demand is $D_1(p_1) = 2A - 2p_1$ in market 1 and $D_2(p_2) = B - p_2$ in market 2, where p_1, p_2 are prices in market 1 and 2 respectively. The producer's costs are

$$C(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2)^2$$

- c) State an expression for the producer's profit and find optimal quantity and price in both markets. (Assume that A and B are such that we get an internal solution.)
- d) State the sufficient condition for a maximum and check if they are satisfied.

Problem 5 (15 points).

True or false? State your reasons.

- f) When the price of a commodity falls, the total expenditure on the commodity will increase provided the demand is inelastic.
- g) The direct substitution effect of a price increase will be positive if the commodity is inferior.
- h) A commodity's budget share will always increase when the income increases.
- i) A commodity's budget share will increase when the price increases only if the demand is inelastic.
- j) In the two-goods case, it may be the case that an increase in the price in one commodity will result in increased demand for both commodities.

Problem 6 (20 points).

A consumer/worker have preferences over consumption, represented by the symbol c , and leisure (represented with the symbol F), given by the utility function.

$U(c, F) = c + \theta\sqrt{F}$, where θ is a positive constant. The consumer wants to maximize this utility function, under the conditions given by a time budget ($T = F + N$) and an economic budget $c = wN + S$. T is available time, N is time used for labour and each unit is paid by a wage of w kroner. S is financial support in kroner. Both wage and financial support is taken as given by the consumer. The price on consumption, c , is equal to one.

- f) Formulate the consumer's utility maximization using Lagranges method, when inserting the time budget into the economic budget. Assume an interior solution.
- g) Derive the utility maximizing combination of consumption and leisure.
- h) What is the condition required to make sure the consumer wants to work? In other words, state the conditions required to ensure that the problem does not have a corner solution.
- i) Assume an interior solution. How is the labour supply affected by
 - Increased wages
 - Increased financial support.

- j) How is the consumption, c , affected by the same changes as in d). Comment upon your results using general economic theory.

Problem 7 (30 points).

A firm produces a commodity in quantity x using energy (denoted E_1) as the only variable input factor in the short run, together with a given amount of real capital. In the short run the production function is $x = f(E_1; \bar{k})$, where \bar{k} is the given amount of real capital. Assume the function is sufficiently differentiable with $\frac{\partial f}{\partial E_1} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2} < 0$ and assume for later use that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k \partial E_1} > 0.$$

- k) Explain what these assumptions about the production function mean.

Assume that the firm wants to maximize the profit facing given prices as a price taker, with P as the product price and q as the price on energy.

- l) What characterizes the profit maximizing solution? Explain why we may write the firm's short term factor demand for energy as $E_1(q, P, \bar{k})$.
- m) How does the firm's short term demand for energy vary with q, P and \bar{k} respectively?

A typical consumer has preferences over two commodities, ordinary consumption (c) and energy (E_2). The consumer maximizes utility under the budget constraint $pc + qE_2 = m$, where p is the price per unit of c , m is income and q the energy price. Prices and income are exogenous and the consumer behaves as a price taker in all markets.

- n) Explain why the consumer's demand for energy can be written as $E_2(q, p, m)$.
- o) Assume that energy is a normal good. What is then the effect on the consumer's demand for energy when q increases, and when m increases?

Suppose there are N firms like the one given in the first part of the problem and M consumers like the one given above, in this economy.

- p) Explain why total demand for energy can be written as $N \cdot E_1(q, P, \bar{k}) + M \cdot E_2(q, p, m)$.
- q) Suppose that the total supply of energy is given as \bar{Y} . State a reason why the equilibrium price can be written as $q(\bar{Y}, p, P, \bar{k}, m, N, M)$.
- r) How does the equilibrium change when the supply of energy increases? What would be the effect of an increased number of consumers?
- s) A unit tax on energy is introduced. What will be the effect on the price the consumers will pay?
- t) Assume finally that the supply of energy in itself is increasing in the energy price q , that is, the market supply for energy may be written as $Y(q)$. At the same time the tax is removed. What will be the effect on the equilibrium price if the number of consumers increases?