UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON2200 Matematikk 1 / Mikro 1
Exam: ECON2200 Mathematics 1 / Microeconomics 1

Eksamensdag: 28.05.2013 **Sensur kunngjøres: 18.06.2013**
Date of exam: 28.05.2013 ***Grades will be given: 18.06.2013***

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00
Time for exam: 09:00 – 15:00 o'clock

Oppgavesettet er på 11 sider
The problem set covers 11 pages ***English version on page 7.***

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Resources allowed:
- No resources allowed

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

ECON2200 vil gjennomgå en periodisk emneevaluering våren 2013, og alle studenter oppmeldt i emnet er invitert til å delta. Evalueringen skjer via nettskjema som er åpent frem til 6.juni. Nettskjemaet finner du på kursets emneside.

ECON2200 will undergo a periodic course evaluation in the spring of 2013, and all students signed up for the course are invited to participate. The evaluation will be conducted through an online evaluation form, and the deadline to participate is June 6. You can find the online evaluation form on the course website.

BOKMÅL

Oppgave 1 *(max 8 poeng, ett poeng per derivasjon, dvs, 2 poeng i e og f.)*

Deriver følgende funksjoner. Deriver med hensyn på begge argumenter i e) og f).

a) $f(x) = x^2 - \ln x$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$

e) $F(x, y) = (x - y)^2$

f) $f(t, s) = \ln(t - s) + \ln(t + s)$ der $t > s > 0$

Oppgave 2 *(4 poeng)* **- Sant eller galt?**

For hver av disse påstandene, avgjør om de er sanne eller gale:

a) $\sum_{i=1}^{4}(2i+3) = \sum_{i=3}^{6}(2i-1)$

b) $\ln(e + x) = 1 + x$

c) $\dfrac{6y+2x}{xy+1} = \dfrac{6+2x}{x+1}$

d) $e^{2\ln x} = x^2$

Oppgave 3 *(7 poeng)*

Betrakt funksjonen $f(x) = 3\ln x - x$.

a) Finn stasjonærpunktet til funksjonen.

b) Tilfredsstiller funksjonen andreordensbetingelsen for et globalt maksimum eller minimum?

c) Finn maksimum for $f(x)$ når $0 \le x \le 2$.

Oppgave 4 *(8 poeng)*

a) Vis at funksjonen $f(x,y) = x^2y^2 - 2x - 2y$ har et stasjonærpunkt i $x = y = 1$.

b) Sjekk andreordensbetingelsen, og avgjør om stasjonærpunktet er et maksimum, et minimum eller ingen av delene.

Oppgave 5 *(max 6 poeng - for hver deloppgave gis 1 for rett svar og inntil 2 for begrunnelsen)*

Sant eller usant? Begrunn svaret

a) Dersom et gode er normalt, kan det ikke være et Giffen-gode.
b) Nyttefunksjonene $u(x,y) = xy$ og $v(x,y) = \ln x + \ln y$ representerer de samme preferansene.

Oppgave 6 *(5 poeng)*

La *y* være implisitt gitt som funksjon av *x* gjennom ligningen $y^2x^3 + 3 = xy$.

a) Hva blir den deriverte av *y* med hensyn på *x*, dvs y'?

Oppgave 7 *(2 poeng riktig på hvert underspørsmål; max 10 poeng)*

Ta utgangspunkt i tilpasningen til en nyttemaksimerende konsument med gitt inntekt og med preferanser over to varer som hver kjøpes til gitte priser. Du skal vurdere om følgende utsagn er sant eller galt:

a) Den direkte substitusjonsvirkningen av en prisøkning kan være positiv om varen vi ser på er mindreverdig i etterspørselen.
b) Hvis begge varepriser øker proporsjonalt, vil tilpasningen være uendret.
c) Hvis en av varene har inntektselasitsitet (Engelelastisitet) større enn én, må den andre varen ha tilsvarende elastisitet mindre enn én.
d) Du får oppgitt at den direkte Cournotelastisiteten for vare 1, $e_{11} = -2$, at budsjettandelen for den andre varen $\alpha_2 = 0,6$ og at vare 2 har en

inntektselastisitet $E_2 = 2$. Da må vare 1 ha en direkte Slutskyelastisitet S_{11} og en inntektselastisitet E_1, gitt ved $S_{11} = -3{,}2$ og $E_1 = 2$.

e) Samme informasjon som i spørsmål d, men nå er påstanden $S_{11} = -2{,}2$ og $E_1 = -0,5$.

Oppgave 8 *(max 16 poeng)*

En bedrift produserer en vare i mengde x med en produktfunksjon $x = An^{\alpha}$, med A og α som positive konstanter, men med $\alpha < 1$. Du kan oppfatte n som en vilkårlig produksjonsfaktor.

a) Utled gjennomsnitts- og grenseproduktivitet for denne produktfunksjonen. Vis ved derivasjon hvordan gjennomsnittsproduktiviteten varierer med n. (2 poeng)
b) Vis hvordan samlede kostnader ved produksjon av x enheter av varen kan utledes når faktorprisen er q. (2 poeng)
c) Utled grense- og gjennomsnittskostnad. Hva kan du si om forløpet til gjennomsnittskostnaden? (2 poeng)

Anta at denne bedriften selger ferdigvaren i et marked til gitt pris p, som prisfast kvantumstilpasser. Målet er å maksimere profitten.

d) Still opp et uttrykk for profitten og utled førsteordensbetingelsen for et profittmaksimum (dvs. bestem den x som maksimerer profitten). Kan du være sikker på at denne betingelsen faktisk løser profittmaksimeringsproblemet? Begrunn svaret ditt! (4 poeng)
e) Utled tilbudsfunksjonen for det ferdige produktet og vis hvordan tilbudt kvantum varierer med hhv.
    - en partiell økning i produktprisen (2 poeng)
    - en partiell økning i faktorprisen (2 poeng)
    - en proporsjonal økning i de to prisene p og q. (2 poeng)

Oppgave 9 *(4 poeng)*

En produktfunksjon $F(n,k)$ antas å være homogen av grad én i (*n*,*k*). Forklar hva en slik antakelse betyr!

Oppgave 10 *(17 poeng)*

Anta at en arbeidstaker/konsument har en nyttefunksjon $U(c,f) = f + \theta \ln c$, over konsum c, og fritid, målt i timer, f. Det antas at θ er en positiv konstant, mens *ln* angir den naturlige logaritmen. Konsumenten har et tidsbudsjett $f + n = T$, der n er arbeidstid målt i timer, mens T er samlet antall timer til disposisjon. Konsumenten opptrer som prisfast kvantumstilpasser både i konsumvaremarkedet og i arbeidsmarkedet, med p som pris per enhet av konsumvaren og med w som lønn per time arbeidet. I tillegg til arbeidsinntekt mottar også arbeidstaker en stønad på S kroner, slik at inntekten $wn + S$ i sin helhet finansierer konsumutgiften pc.

a) Bestem den marginale substitusjonsbrøk mellom fritid og konsum og angi egenskaper ved denne. Hva uttrykker den marginale substitusjonsbrøk?(2 poeng)
b) Utled den nyttemaksimerende tilpasningen av konsum og fritid ved hjelp av Lagranges metode. (3 poeng)
c) Hva er betingelsen for at det vil bli tilbudt et positivt antall arbeidstimer? Gi en tolkning av denne betingelsen. (2 poeng)
d) Fastlegg etterspørselsfunksjonen for konsum og tilbudsfunksjonen for arbeid, når du tar hensyn til at i noen tilfeller *kan* konsumenten finne det ønskelig ikke å tilby arbeid. (4 poeng)
e) Anta at det tilbys arbeidstimer. Hvordan varierer konsum og arbeidstilbud, angitt ved elastisiteter, når
   - konsumvaren blir dyrere (2 poeng)
   - lønna øker (2 poeng)
   - stønadsbeløpet øker (2 poeng)

<u>Oppgave 11</u> *(15 poeng)*

Betrakt et fullkomment konkurransemarked for en vare i et land. Markedsetterspørselen for varen er gitt ved $X^E = A - p$, der X^E er etterspurt kvantum, p er prisen og A en positiv konstant.

Tilbudssiden i dette markedet består av n like bedrifter, *hver* med en kostnadsfunksjon $C(y) = a + by + cy^2$, med a,b og c som positive konstanter, og med y som produsert kvantum av varen i en enkelt bedrift. Hver bedrift maksimerer profitt som prisfast kvantumstilpasser.

a) Bestem det profittmaksimerende kvantum for den enkelte bedrift. Under hvilke betingelser vil den tilby et positivt kvantum av varen? (2 poeng)
b) Vis at markedstilbudet kan uttrykkes som $X^T = \dfrac{n(p-b)}{2c}$. (2 poeng)
c) Hva må prisen være for at vi skal ha markedslikevekt? (2 poeng)
d) Hva skjer med prisen om A øker? Hva kan en slik økning skyldes? (2 poeng)

Anta at tilbudssiden på hjemmemarkedet monopoliseres, og at monopolbedriften har en kostnadsfunksjon $C(X) = a + bX + cX^2$, med X som produsert kvantum.

e) Hvilket kvantum vil monopolisten ønske å selge på markedet når den maksimerer profitt og står overfor etterspørselsfunksjonen $X^E = A - p$? Hva blir monopolprisen? (3 poeng)

Sett nå at det åpner seg en ny mulighet for monopolisten; ikke bare kan den selge hjemme som en monopolist, den kan også selge varen på verdensmarkedet til en gitt pris Q.

f) Når vil monopolisten finne det lønnsomt å selge på verdensmarkedet? Hvordan vil denne beslutningen påvirke omsatt kvantum og pris på hjemmemarkedet? (4 poeng)

ENGLISH

Problem 1 *(8 points, one point per differentiation, i.e, 2 points in e and f.)*

Differentiate the following functions. Differentiate with respect to both arguments in e) and f).

a) $f(x) = x^2 - \ln x$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$

e) $F(x, y) = (x - y)^2$

f) $f(t, s) = \ln(t - s) + \ln(t + s)$ der $t > s > 0$

Problem 2 *(4 points)* **- True or false?**

For each claim, determine whether they are true or false:

a) $\sum_{i=1}^{4}(2i+3) = \sum_{i=3}^{6}(2i-1)$

b) $\ln(e + x) = 1 + x$

c) $\dfrac{6y + 2x}{xy + 1} = \dfrac{6 + 2x}{x + 1}$

d) $e^{2\ln x} = x^2$

Problem 3 *(7 points)*

Consider the function $f(x) = 3\ln x - x$.

a) Find the stationary point for this function.

b) Are the second order conditions for a maximum or minimum satisfied?

c) Find the maximum for $f(x)$ when $0 \leq x \leq 2$.

<u>Problem 4</u> *(8 points)*

a) Show that the function $f(x,y) = x^2y^2 - 2x - 2y$ has a stationary point in $x = y = 1$.

b) Check the second order condition and determine whether the stationary point is a maximum, a minimum or none of them.

<u>Problem 5</u> *(max 6 points - for each sub-problem you are awarded 1 point for correct answer and up to 2 for the explanation)*

True or false? Explain your answer.

a) If a good is normal it cannot be a Giffen-good.
b) The utility functions $u(x,y) = xy$ and $v(x,y) = \ln x + \ln y$ represents the same preferences.

<u>Problem 6</u> *(5 points)*

Let *y* be implicitly given as a function of *x* through the equation $y^2x^3 + 3 = xy$.

a) What is the derivative of *y* with respect to *x*; that is: what is *y'*?

<u>Problem 7</u> *(2 points for each correct answer; max 10 points)*

Consider a consumer's utility-maximizing behaviour with a given income, and with preferences over two commodities that are purchased at given prices. You are going to evaluate whether the following statements are correct or not:

a) The direct substitution effect of a price increase might be positive if the demand for the commodity is inferior.
b) If both prices increase proportionally, the optimal choice is unaffected.

c) If one of the commodities has income elasticity (Engel elasticity) greater than one, then the other commodity must have an income elasticity below one.

d) You have learnt that the direct Cournot elasticity for commodity 1 is $e_{11} = -2$, that the budget share of commodity 2 is $\alpha_2 = 0,6$, and that commodity 2 has an income elasticity $E_2 = 2$. In that case commodity 1 must have a direct Slutsky elasticity S_{11} and an income elasticity E_1, as given by $S_{11} = -3,2$ and $E_1 = 2$.

e) Same information as in question d, but now the claim is $S_{11} = -2,2$ and $E_1 = -0,5$.

Problem 8 *(max 16 points)*

A firm is producing some good in amount x from a production function $x = An^{\alpha}$, with A and α being positive constants with $\alpha < 1$. You may consider n as an arbitrary factor of production.

a) Derive average and marginal productivity from this production function. Demonstrate by differentiation how the average productivity will vary with n. (2 points)

b) Demonstrate how the cost of producing x units of the good can be derived when the factor price is q. (2 points)

c) Derive marginal and average cost. What can you tell about the shape of the average cost? (2 points)

Suppose that this firm is selling the final good in a market at a given price p, as a price taker. The objective is to maximize profits.

d) Provide an expression for the profits and derive the first-order condition for profit maximization (that is, determine the output x that is maximizing the profits). Can you be sure that this condition will in fact solve the problem? Explain your answer! (4 points)

e) Derive the supply function for the final output and show how the supply will vary with, respectively,

- A partial increase in the output price (2 points)

- A partial increase in the factor price (2 points)
- A proportional increase in both prices p and q. (2 points)

Problem 9 *(4 points)*

A production function $F(n,k)$ is homogenous of degree one in (*n*,*k*). Explain what this assumption means!

Problem 10 *(17 points)*

Assume that a worker/consumer has a utility function $U(c,f) = f + \theta \ln c$, defined for consumption c, and leisure, measured in hours, f. We suppose that θ is a positive constant, whereas *ln* is the natural logarithm. The consumer has a time budget $f + n = T$, where n is the number of hours worked, whereas T is the total hours available. The consumer acts as a price taker in both the consumption good market and the labour market, with p as the price per unit of the consumption good, and w as wage per hour. In addition to labour income, the worker receives a transfer equal to S kroner, so that total income $wn + S$ is used to cover the consumption expenditure pc.

a) Derive the marginal rate of substitution between consumption and leisure, and explain some of its properties. What does the marginal rate of substitution express? (2 points)
b) Derive the utility-maximizing choice of consumption and leisure by using Lagrange's method. (3 point)
c) Under what condition will the worker supply a positive number of working hours? Provide an interpretation of this condition. (2 points)
d) Determine the demand function for consumption and supply function for hours worked, when you take into account the possibility that under some circumstances no working hours will be supplied. (4 points)
e) Suppose that the worker will supply a positive number of working hours. How will consumption and hours worked vary, expressed using elasticities, as:
   - The consumption good becomes more expensive (2 points)
   - The wage rate increases (2 points)
   - The transfer is increased (2 points)

<u>Problem 11</u> *(15 points)*

Consider a perfectly competitive market for a good in some country. The market demand is given by $X^E = A - p$, where X^E is the demand, p the price, and A a positive constant.

The supply side in this market consists of n identical firms or producers, *each* with a cost function $C(y) = a + by + cy^2$, with a, b and c being positive constants, and with y as individual output. Each producer will maximize profits as price taker.

a) What output will maximize individual profit? Under what conditions will the individual supply of the good be positive? (2 points)

b) Show that the market supply can be expressed as $X^T = \dfrac{n(p-b)}{2c}$. (2 points)

c) What is the equilibrium price? (2 points)

d) What is the impact on the equilibrium price if A increases? What might be the underlying factors behind such an increase? (2 poeng)

Suppose that the domestic supply side is monopolized, and that the monopoly operates with a cost function $C(X) = a + bX + cX^2$, where X is total output.

e) What output level will a profit-maximizing monopolist prefer to sell in the market when facing a market demand $X^E = A - p$? What is the monopoly price? (3 points)

Suppose a new market opportunity is open to the monopolist. Not only will it be able to sell as a monopolist in the domestic market, but it might also sell on a world market at a given price Q.

f) Under what conditions will the monopolist find it profitable to sell at the world market? What impact will this decision have on output sold and price in the domestic market? (4 points)