UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Bokmål

Eksamen i: ECON2200 – Matematikk 1/ Mikro 1
Exam: ECON2200 – Mathematics1/ Microeconomics 1

Eksamensdag: 27.05.2014 **Sensur kunngjøres: 17.06.2014**
Date of exam: 27.05.2014 ***Grades will be given: 17.06.2014***

Tid for eksamen: kl. 09:00-15:00
Time for exam: 09:00-15:00

Oppgavesettet er på 10 sider
The problem set covers 10 pages ***English version on page 6***

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler (bortsett fra dersom du har fått godkjent bruk av ordbok fra SV-fakultetet)

Resources allowed:
- *No resources allowed (except if you have been granted use of a dictionary from the Faculty of Social Sciences)*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Oppgave 1 (8 poeng)

Deriver følgende funksjoner. Deriver med hensyn på begge argument i e) og f).

a) $f(x) = 2x^3 + x^{-2} - 2\ln x$

b) $f(x) = (\sqrt{x-1} + 1)^2$ der $x > 1$

c) $f(x) = \ln g(x)$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{g(x)}$

e) $F(x, y) = (x^2 - \dfrac{1}{y})^2$

f) $f(s,t) = \ln(s-t) - \ln(s+t)$ der $s > t > 0$

Oppgave 2 (5 poeng) Sant eller galt?

For hver av disse påstandene, avgjør om de er sanne eller usanne.

a) $\sum_{i=1}^{5}(4+2i)^2 = \sum_{i=3}^{7} 4i^2$

b) $\ln(x^3 y) = 3\ln x + \ln y$

c) $\dfrac{2x+6}{2x} = \dfrac{x+6}{x}$

d) $2\ln(e^x) = x^2$

e) $\ln x - \ln 2 = \ln \dfrac{x}{2}$

Oppgave 3 (10 poeng)

Betrakt funksjonen $f(t) = \max_x \left(\ln x - tx\right)$

a) Finn, ved hjelp av omhyllingssetningen, et uttrykk for $f'(t)$ uten først å løse maksimeringsproblemet.
b) Løs maksimeringsproblemet og finn et uttrykk for $f(t)$ hvor x ikke inngår.
c) Vis at andreordensbetingelsen for maksimeringen i b) er tilfredsstilt.
d) Bruk svaret i b) til å finne $f'(t)$.
e) Oppgave a) og d) vil gi to ulike uttrykk for $f'(t)$. Vis at svarene likevel er ekvivalente.

Oppgave 4 (10 poeng)

En bedrift produserer to varer. Den produserer et kvantum x_1 av vare 1 og et kvantum x_2 av vare 2. Prisen på de to varene er henholdsvis p_1 og p_2 der $2p_1 > p_2 > 0$ og $2p_2 > p_1 > 0$. Produsenten har kostnader $C(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$.

a) Sett opp et uttrykk for produsentens profitt. Sett opp førsteordensbetingelsene for produsentens profittmaksimering, og finn optimalt produksjonskvantum for begge varene.

b) Vis at de tilstrekkelige betingelsene for et maksimum er tilfredsstilte.

Oppgave 5 (10 poeng)

Sant eller usant? Begrunn svaret.

a) Et Giffen-gode kan ikke være normalt.

b) Uttrykket $\dfrac{U'_{c_1}(c_1, c_2)}{p_1}$ forteller hvor mye ekstra nytte konsumenten får av å bruke en krone mer på vare 1. Her er U nyttefunksjonen, c_1, c_2 er konsumet av to varer og p_1 er prisen på vare 1.

c) Substitumalen avhenger av produktprisen.

d) Når gjennomsnittskostnaden når sitt minimum, er grensekostnaden alltid lik 0.

Oppgave 6 (8 poeng)

Markedet for bankutlån kan beskrives på en enkel måte som et perfekt konkurransemarked, der etterspørselen etter lån, fra mange låntakere, er gitt ved $L(r;\alpha)$, der r er renta låntakere må betale for å låne, mens α er en skiftparameter. Det antas at etterspørselen er lavere jo høyere lånerenta er; dvs. $L_r(r;\alpha) := \dfrac{\partial L(r;\alpha)}{\partial r} < 0$. Anta også $L_\alpha(r;\alpha) := \dfrac{\partial L(r;\alpha)}{\partial \alpha} > 0$. Vi kan tenke oss at α gir en indikasjon på hvor «opphetet» boligmarkedet er.

Tilbudet av lån kommer fra mange banker, som hver kan låne ut en andel av de innskuddene banken får (det er ingen andre måter bankene kan finansiere seg på). Innskuddene til bankene er D, men kun en andel k av disse innskuddene kan lånes ut. (Vi kan derfor oppfatte $(1-k)$ som et «reservekrav» bankene er pålagt.) Samlet tilbud av lån fra bankene er dermed $kD(r)$, der vi regner med $D'(r) > 0$.

a) Illustrer i en figur hva renta må være for at markedet skal være i likevekt, for gitte verdier på de eksogene størrelsene α og k.

b) Vis utfra likevektsbetingelsen, hvordan samlede lån og markedsrente påvirkes av at reservekravet $1-k$ økes; dvs. at k settes ned.
c) Hva skjer i lånemarkedet når α går opp (boligmarkedet blir mer «opphetet»)?
d) Kan myndighetene, om α endrer seg, justere reservekravet $(1-k)$ slik at samlet lånevolum og markedrente holder seg uendret? Diskuter dette ved hjelp av figuren fra punkt a.

Oppgave 7 (15 poeng)
En bedrift produserer en vare i mengde x ved en produktfunksjon $x = f(v) = \left(v - A\right)^{\alpha}$. Vi må minst bruke en mengde A av produksjonsfaktoren v for å få en positiv produktmengde. α er en positiv konstant, strengt mindre enn én; dvs. $0 < \alpha < 1$.

a) Utled grense- og gjennomsnittsproduktivitet for denne produktfunksjonen for det tilfellet at $A = 0$ og $\alpha = \frac{1}{2}$.
b) Gjør det samme som under punkt a, men for en vilkårlig og strengt positiv verdi for $\alpha < 1$, samt $A > 0$. For hvilken verdi av v vil gjennomsnittsproduktiviteten ha et maksimum?
c) Skisser grafen til $f(v), f'(v)$ og $\frac{f(v)}{v}$, når du setter $A > 0$ og $\alpha = \frac{1}{2}$.
d) Hva blir minste nødvendige faktorinnsats om bedriften skal produsere en gitt produktmengde x_0?
e) Fastlegg bedriftens kostnadsfunksjon med gitt pris lik q kroner per enhet av produksjonsfaktoren. Hva blir grense- og gjennomsnittskostnad?

Bedriften ønsker å maksimere profitten. Den kan selge det ferdige produktet til en gitt pris p kroner per enhet. Den faste kostnaden qA er en driftsavhengig fast kostnad som faller helt bort ved driftsstans. Du kan sette $\alpha = \frac{1}{2}$ i de gjenværende punktene.

f) Bestem det kvantum som maksimerer profitten. Når vil driftsstans være optimalt?
g) Ved hjelp av en figur, skisser forløpet til tilbudskurven for denne bedriften; dvs. tilbudt kvantum som funksjon av produktprisen.

Anta at prisene er slik at det lønner seg for bedriften å tilby et positivt kvantum av produktet.

h) Vis i figuren fra punkt g, hvordan den profittmaksimerende tilpasningen påvirkes av at faktorprisen q øker?

Oppgave 8 (15 poeng)

Betrakt en konsument med en nyttefunksjon $U(x,c) = \ln x + b \cdot \ln(c - a)$, der (x,c) er kvanta av to varer, a angir et konstant «minstekonsum» av c-varen, mens b er en positiv konstant. Konsumenten har en gitt inntekt på m kroner og står overfor gitte priser: p kroner per enhet av x-varen og q kroner per enhet av c-varen. Anta at $qa < m$.

a) Utled den marginale substitusjonsbrøk for denne nyttefunksjonen. Hva betyr det at parameteren b tar en høyere verdi?

b) Utled den nyttemaksimerende tilpasningen ved Lagranges metode, og utled etterspørselsfunksjonene for de to varene.

c) Hvordan påvirkes etterspørselen etter de to varene av at prisen på x-varen øker?

Sett nå $a = 0$ i de neste spørsmålene.

d) Vis at de to varenes budsjettandeler vil være konstante. Hva kan du da si om størrelsen på inntekts- eller Engelelastisitetene?

Vi kan skrive de ordinære etterspørselsfunksjonene generelt som $x(p,q,m)$ og $c(p,q,m)$, og de *kompenserte* etterspørselsfunksjonene som $h_x(p,q,u)$ og $h_c(p,q,u)$. Da vet vi at Slutskylikningen for x-varen ved endring i hhv. prisen p og i q, kan skrives som $\frac{\partial h_x}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + x\frac{\partial x}{\partial m}$ og $\frac{\partial h_x}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} + c\frac{\partial x}{\partial m}$.

e) På grunnlag av de etterspørselsfunksjonene du har utledet tidligere, skal du bestemme de to kompenserte etterspørselsderiverte («Slutskyderiverte») for x-varen.

Oppgave 9 (8 poeng)

En bedrift produserer en vare i mengde x med en produktfunksjon $x = f(n)$, der n er bruk av arbeidskraft. Produktfunksjonen er slik at $f(0) = 0, f'(n) > 0, f''(n) < 0$. Du kan også anta at $f'(0) = \infty$. Anta i første omgang at bedriften selger denne varen som en prisfast kvantumstilpasser, til gitt pris p. Arbeidskraften betales med en gitt lønn, w, per enhet av n.

a) Løs bedriftens profittmaksimeringsproblem, og vis hvordan dens etterspørsel etter arbeidskraft varierer med lønna.

Anta nå i stedet at bedriften opptrer som monopolist i ferdigvaremarkedet med en etterspørselsfunksjon gitt ved $p = D(x)$, som er avtakende i omsatt kvantum. Bedriften har samme produktfunksjon som over og betaler samme lønn til arbeidskraften. Den velger nå n slik at profitten, $\pi(n) = D(f(n))f(n) - wn$, maksimeres.

b) Utled førsteordensbetingelsen for bedriftens bruk av arbeidskraft.
c) Gi en forklaring på hvorfor tilpasningsbetingelsen ved monopol er forskjellig fra den ved prisfast kvantumstilpasning.

Oppgave 10 (8 poeng)
En bedrift produserer en vare i mengde x med en produktfunksjon $F(n,k)$, som er strengt voksende i hvert argument og med strengt avtakende grenseproduktiviteter. Produksjonsfaktorene antas å være teknisk komplementære.

a) Hva betyr det at produksjonsfaktorene er teknisk komplementære?

Bedriften maksimerer overskuddet til gitte priser på produktet og hver av de to produksjonsfaktorene, med prisene p per enhet av produktet, w per enhet av n og q per enhet av k. Et indre profittmaksimum er kjennetegnet ved førsteordensbetingelsene $p\dfrac{\partial F}{\partial n} = w$ og $p\dfrac{\partial F}{\partial k} = q$.

b) Illustrer disse to betingelsene i hver sin figur. Bruk dem (uten regning) til å vise hva virkningen på begge typer faktorbruk når q øker, når du opprettholder antakelsen om teknisk komplementaritet.

English version

Problem 1 (8 points)

Differentiate the following functions. Differentiate with respect to both arguments in problems e) and f).

a) $f(x) = 2x^3 + x^{-2} - 2\ln x$

b) $f(x) = (\sqrt{x-1}+1)^2$ where $x > 1$

c) $f(x) = \ln g(x)$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{g(x)}$

e) $F(x,y) = (x^2 - \dfrac{1}{y})^2$

f) $f(s,t) = \ln(s-t) - \ln(s+t)$ where $s > t > 0$

Problem 2 (5 points) True or false?

For each claim, decide if they are true or false.

a) $\sum_{i=1}^{5}(4+2i)^2 = \sum_{i=3}^{7} 4i^2$

b) $\ln(x^3 y) = 3\ln x + \ln y$

c) $\dfrac{2x+6}{2x} = \dfrac{x+6}{x}$

d) $2\ln(\mathrm{e}^x) = x^2$

e) $\ln x - \ln 2 = \ln \dfrac{x}{2}$

Problem 3 (10 points)

Consider the function $f(t) = \max_x \left(\ln x - tx\right)$

a) Find, using the envelope theorem, an expression for $f'(t)$ without first solving the maximization problem.
b) Solve the maximization problem and find an expression for $f(t)$ that does not include x.
c) Show that the second order condition for the maximization in b) is satisfied.

d) Use the answer in b) to find $f'(t)$.

e) Problem a) and d) will result in two different expressions for $f'(t)$. Show that the two expressions are equivalent.

Problem 4 (10 points)

A firm is producing two commodities. The firm produces a quantity x_1 of commodity 1 and a quantity x_2 of commodity 2. The prices of the two commodities are p_1 and p_2 respectively, where $2p_1 > p_2 > 0$ and $2p_2 > p_1 > 0$. The producer has costs $C(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$.

a) Give an expression for the producer's profit. Write down the first order conditions for the producer's profit maximization, and find optimal production quantity for both commodities.

b) Show that sufficient conditions for a maximum are satisfied.

Problem 5 (10 points)

True or false? Give a reason for your answer.

a) A Giffen-good cannot be normal.

b) The expression $\dfrac{U'_{c_1}(c_1, c_2)}{p_1}$ states how much extra utility a consumer gets from spending 1 krone more on commodity 1. Here U is the utility function, c_1, c_2 are the consumption of the two goods and p_1 is the price of commodity 1.

c) The expansion path ("substitumalen") depends on the product price.

d) When the average cost reaches its minimum, the marginal cost is always equal to 0.

Problem 6 (8 points)

The market for bank loans can be described as a perfectly competitive market, in which the demand for loans, from many borrowers, is given by $L(r;\alpha)$, where r is the interest rate the borrowers have to pay, whereas α is a shift parameter. The demand function is decreasing in the rate of interest; hence $L_r(r;\alpha) := \dfrac{\partial L(r;\alpha)}{\partial r} < 0$.

Assume also that $L_\alpha(r;\alpha) := \dfrac{\partial L(r;\alpha)}{\partial \alpha} > 0$. We can think of α as indicating the «heat» in the housing market.

The supply of loans is provided by a large number of banks that can each lend a fraction of their deposits (the only source for funding). The deposits to banks are given by D, but only a fraction k of the deposits can be extended as loans. (We can perceive of $(1-k)$ as a "reserve requirement" being imposed upon the banks.) Total supply of loans from the banks is then, $kD(r)$, where it is assumed that $D'(r) > 0$.

a) Illustrate in a figure what the interest must be for the market to in equilibrium, for given values of the exogenous variables α and k.
b) Based on the equilibrium condition, please show how the volume of loans and the interest rate will be affected if the reserve requirement, $1-k$ is increased; i.e., if k is being reduced.
c) What will happen in the market for bank loans when α increases (the housing market gets more "heated")?
d) Can the government, if α changes, adjust the reserve requirement $(1-k)$ in such a way that the volume of loans and the rate of interest will be kept unchanged? Discuss this isssue using the figure from point a above.

Problem 7 (15 points)
A firm is producing a quantity x of some output by means of a production function $x = f(v) = \left(v - A\right)^{\alpha}$. At least a quantity A of the input v is required to get a positive output level. α is a positive constant, strictly smaller than one; i.e., $0 < \alpha < 1$.

a) Derive the marginal- and average cost for this production function when $A = 0$ and $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
b) Do the same exercise as in point a, but for an arbitrary and strictly positive value of $\alpha < 1$, and $A > 0$. For what value of v will the average productivity reach a maximum?
c) Depict the graphs for $f(v), f'(v)$ and $\dfrac{f(v)}{v}$, when you assume that $A > 0$ and $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
d) What is the smallest input necessary if the firm is going to produce some fixed amount of the final output x_0?
e) Derive the cost function for the firm, assuming a given price q kroner per unit of the input. What are the marginal and average costs?

The firm aims at maximizing its profit. The final output can be sold at a given price p kroner per unit. The fixed cost qA is production dependent and will not arise if production ceases. You may put $\alpha = \dfrac{1}{2}$ for the remaining questions.

f) What amount of output will maximize profits? Under what conditions will it be optimal to cease production?
g) Using a figure sketch the shape of the supply curve for this firm; that is, the output supplied as a function of the product price.

Suppose that the prices take values making it profitable to produce a positive quantity of the output.

h) In the diagram from point g above, how will the firm's profit-maximizing choice be affected by an increase in the input price q?

Problem 8 (15 points)

Consider a consumer with a utility function $U(x,c) = \ln x + b \cdot \ln(c-a)$, where (x,c) are the quantities of two commodities a is a fixed "minimalconsumption level" of the c-commodity, whereas b is a positive constant. The consumer has a given income of m kroner and faces given prices of the two commodities: p kroner per unit of the x-commodity, and q kroner per unit of the c-commodity. Suppose that $qa < m$.

a) Determine the marginal rate of substitution for this utility function. What does it mean that the parameter b takes a higher value?
b) Derive the utility maximising consumption choice by using Lagrange's method, and derive the corresponding demand functions for the two commodities.
c) How is demand for each commodity affected by a higher price of the x-commodity?

Assume that $a = 0$ in the subsequent questions.

d) Show that the budget shares for the two commodities will then be constants. What can then be said about the income (or Engel) elasticities?

We can write the ordinary demand functions in general as $x(p,q,m)$ and $c(p,q,m)$, and the *compensated* demand functions as $h_x(p,q,u)$ and $h_c(p,q,u)$. We then know that the Slutsky equation for the x-commodity from a change in the price p, respectively in the price q, can be expressed as $\frac{\partial h_x}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + x\frac{\partial x}{\partial m}$ and $\frac{\partial h_x}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} + c\frac{\partial x}{\partial m}$.

e) Based on the demand functions you have derived above, please determine the compensated demand derivatives («the Slutsky derivative») for the x-commodity.

Problem 9 (8 points)

A firm is producing a good in volume x by using a production function $x = f(n)$, where n is the input of labour. The production function is such that $f(0) = 0, f'(n) > 0, f''(n) < 0$. You may also assume that $f'(0) = \infty$. In the first place, assume that he firm can sell this output as a price taker, at a given price p. Labour is paid a fixed wage, w, per unit of n.

a) Solve the firm's profit maximisation problem, and show how the firm's demand for labour will vary with the wage rate.

Suppose next, instead, that the firm is a monopolist in the market for its final output, facing a demand function as given by $p = D(x)$, which is decreasing in output. The firm operates with the same production function as above, and is paying the same wage rate. The firm will now choose n so as to maximise its profit

$\pi(n) = D(f(n))f(n) - wn$

b) Derive the first-order condition for the firm's labour input.
c) Explain why the firm's first-order condition as a monoplist will differ from the case with price-taking behaviour.

Problem 10 (8 points)

A firm is producing an output in volume x by using a production function $F(n,k)$, which is strictly increasing in each input and with strictly declining marginal productivities. The inputs are assumed to be technical complements.

a) What does it mean that the inputs are technical complements?

The firm is maximising its profit at given prices of the output and each input with prices p per unit of the output, w per unit of n and q per unit of k. An interior maximum for profit is given by the first-order conditions $p\dfrac{\partial F}{\partial n} = w$ and $p\dfrac{\partial F}{\partial k} = q$.

b) Depict these conditions in separate diagrams. Use them (without any mathematics) to show the impact on the use of the two inputs when q goes up, when retaining the assumption of technical complementarity.