UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON2200 – Matematikk 1/Mikro 1 (MM1)**

Eksamensdag: 27.05.2015 **Sensur kunngjøres: 17.06.2015**

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00

Oppgavesettet er på 4 sider

Tillatte hjelpemidler:

- Det er kun tillatt å bruke ordbok. Ordboken skal kontrolleres av SV-infosenter på forhånd.

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

EKSAMEN ECON2200

Våren 2015

Oppgave 1 (7 poeng)

Deriver følgende funksjoner

a) $f(x) = x^3 + 2x - \frac{1}{x}$

b) $f(x) = e^{x^2} = \exp(x^2)$

c) $f(x) = \ln \frac{1}{3-2x}$

Deriver med hensyn på begge variable

d) $g(x, y) = \ln(x - y)$ der $x > y$

e) Finn $\frac{\partial z}{\partial t}$ og $\frac{\partial z}{\partial s}$ når $z = x^2 y$ og $x = t + s$, $y = t - s$

Oppgave 2. Sant eller galt? (4 poeng)
For hver av påstandene nedenfor avgjør om de er generelt sanne eller gale.

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

b) $e^{\ln x} = x$

c) $\frac{2x+3y}{3x} = \frac{2\cancel{x}+3y}{3\cancel{x}} = \frac{2+3y}{3}$

d) $\sum_{i=3}^{6} i^2 = \sum_{i=0}^{3} (i+3)^2$

Oppgave 3 (10 poeng)
En konsument har nyttefunksjon $u(c_1, c_2) = \ln c_1 + \ln c_2$

og maksimerer nytten gitt budsjettbetingelsen $p_1 c_1 + p_2 c_2 = m$

a) Sett opp Lagrangefunksjonen og tilhørende førsteordensbetingelser og vis at begge varene har samme budsjettandel.
b) Bruk resultatet i a) til å utlede etterspørselsfunksjonen for de to varene.

Betrakt nå en konsument som velger mellom N forskjellige varer, der $N \geq 2$ er et heltall. Nyttefunksjonen er

$$u(c_1, c_2, ..., c_N) = \sum_{i=1}^{N} \ln c_i$$

og budsjettbetingelsen er

$$\sum_{i=1}^{N} p_i c_i = m$$

c) Sett opp Lagrangefunksjonen i dette tilfellet og vis at førsteordensbetingelsen medfører at

$$p_i c_i = \frac{1}{\lambda} \text{ for alle } i$$

d) Hva blir budsjettandelen til vare i?

Oppgave 4 Er påstandene generelt sanne eller gale? Begrunn svaret. (16 poeng)

a) $c_1(p_1, p_2, Y(p_1, p_2, u)) = h_1(p_1, p_2, u)$ der c_1 er vanlig etterspørsel, h_1 er kompensert etterspørsel og Y er utgiftsfunksjonen.

b) En monopolist vil normalt sette en pris som er lavere en grensekostnaden.

c) La $f(x)$ være en kontinuerlig og deriverbar funksjon som er definert overalt. Dersom $f'(c) = 0$ og $f''(c) \leq 0$ så er c et globalt maksimumspunkt.

d) Dersom $g(r) = \max_x (\ln x - rx)$ så er $g'(r) = \dfrac{1}{x^*(r)} - r$ der $x^*(r)$ er optimal x for gitt r.

Oppgave 5 (6 poeng)

a) Finn stasjonærpunktet til funksjonen

$$f(x, y) = \ln x + 3\ln y - x - 9y$$

b) Vis at andreordensbetingelsene er oppfylt.

Oppgave 6 (22 poeng)

Betrakt en bedrift som produserer en vare mengde x med produktfunksjonen $x = v^a$, der v er innsats av en produksjonsfaktor, og a en positiv konstant, mindre enn én.

a) Utled gjennomsnitts– og grenseproduktivitet.
b) Hvordan varierer gjennomsnittsproduktiviteten med faktorinnsatsen?

Anta at denne bedriften opptrer som prisfast kvantumstilpasser både i produktmarkedet og i markedet for produksjonsfaktoren. Prisen per enhet av produktet er p, mens prisen per enhet av produksjonsfaktoren er q.

c) Vis at kostnaden da kan skrives som $C(x;q) = q \cdot x^{\frac{1}{a}}$, og utled grense– og gjennomsnittskostnad.
d) Still opp uttrykket for bedriftens profitt og bestem det profittmaksimerende kvantum av produktet og tilhørende bruk av produksjonsfaktoren. Utled både førsteordens- og andreordensbetingelser for et profittmaksimum.
e) Hvordan påvirkes produkttilbud og faktoretterspørsel av endringer i de to prisene?

Anta nå at denne bedriften oppnår en monopolstilling i ferdigvaremarkedet der den står overfor en etterspørselsfunksjon $x = A - p$, med A som en positiv konstant, med x som omsatt kvantum og p som markedspris. Imidlertid skal vi anta at monopolisten har en «ny» kostnadsfunksjon, gitt ved $c(x) = qx + B$, der B er en driftsavhengig fast kostnad.

f) Hvordan vil bedriften, nå som profittmaksimerende monopolist, velge produsert kvantum? Hva blir monopolprisen?
g) Når vil monopolisten velge midlertidig produksjonsstans?
h) Hva er virkningen på monopoltilpasningen av høyere marginalkostnad?

Oppgave 7 (21 poeng)

En konsument har preferanser for to varer, gitt ved nyttefunksjonen $U(c_1, c_2)$, som har kontinuerlige partielle deriverte av 2.orden og er strengt voksende i de to argumentene.

a) Forklar hva den marginale substitusjonsbrøk uttrykker.

Anta at nyttefunksjonen tar formen $U = a\ln(c_1 - A) + b\ln c_2$ og at konsumenten har en gitt inntekt m som brukes til å kjøpe de to varene til gitte priser (som prisfast kvantumstilpasser); p_1 og p_2. Anta at $m > p_1 A$.

b) Still opp Lagrangefunksjonen til dette problemet og forklar hvordan en nyttemaksimerende konsument vil tilpasse seg. Vis at løsningen må oppfylle en tangeringsbetingelse som kan skrives som $ap_2c_2 = bp_1(c_1 - A)$, i tillegg til budsjettbetingelsen.

c) Vis at de ordinære etterspørselsfunksjonene for de to varene kan uttrykkes som:

$$c_1 = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1} + \frac{b}{a+b}A \text{ og } c_2 = \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2} - \frac{b}{a+b}\frac{p_1}{p_2}A.$$

d) Hvordan påvirkes etterspørselen etter de to varene av
   - Økt inntekt?
   - Høyere pris på vare 1?

I resten av oppgaven skal du anta at $A = 0$.

e) Bestem de to varenes budsjettandeler.

f) Kan du, på bakgrunn av det som er utledet over, si om etterspørselen etter vare 1 er elastisk/nøytral elastisk/uelastisk; og om de er normale (fullverdige) eller mindreverdige i etterspørselen?

g) På grunnlag av det du har utledet, finn eksplisitte uttrykk for substitusjonsvirkningen av en økning i prisen på vare 1, enten (i) ved den kompenserte etterspørselsderiverte for vare *i*, $\frac{\partial h_i}{\partial p_1}$, eller (ii) Slutskyelastisiteten, gitt ved $S_{i1} = El_{p_1} h_i$ for $i = 1,2$. (Merk: Det er tilstrekkelig å velge ett av alternativene (i) eller (ii).)

Oppgave 8 (9 poeng)

En bedrift har en produktfunksjon som viser produktmengde per uke x som en funksjon av antall timeverk per uke. Med N ansatte som hver jobber h timer per uke, vil antall timeverk være hN, bestemme x ved $F(hN)$. Anta at denne produktfunksjonen er to ganger deriverbar med kontinuerlige deriverte av 2.orden, med $F(0) = 0, F' > 0$ og $F'' < 0$. Bedriften betaler en timelønn w og selger produktet til gitt pris p.

a) Still opp et uttrykk for profitt per uke og gi betingelser for at drift er lønnsomt.

b) Anta at arbeidstiden er gitt og fastlegg det antall ansatte som maksimerer profitten per uke.

c) Hvordan påvirkes antall ansatte av at arbeidstiden går ned, for uendret timelønn?

d) Hvordan påvirkes antall ansatte av en høyere lønn for uendret arbeidstid?

Oppgave 9 (5 poeng)

I et marked for en vare er etterspørselen gitt ved $D(p;\alpha)$ og tilbudet gitt ved $S(p;\beta)$, der p er pris, mens α og β er en samling av skiftparametere som påvirker hhv. etterspørsel og tilbud.

Anta at $D_p' < 0$, $D_\alpha' > 0$, $S_p{}' > 0$ og $S_\beta{}' > 0$

a) Redegjør for hva som kan fanges opp av skiftparameterne.

b) Vis ved implisitt derivasjon virkningen på markedspris og omsatt kvantum av et skift i tilbudskurven, og forklar hvilke faktorer som er bestemmende for hvordan markedspris og omsatt kvantum påvirkes.