

Løsningsforslag til eksamen i ECON 2200 – vår 2005

Oppgave 3.

- i) Lagrangefunksjonen er $L(x, y, \lambda) = y + Ax^\alpha - \lambda[p \cdot xy - m]$, og løsningen på problemet må oppfylle:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = A\alpha x^{\alpha-1} - \lambda p = 0$$

$$px + y = m$$

Bruker vi at Lagrangemultiplikatoren $\lambda = 1$ i den andre betingelsen, finner vi etterspørselsfunksjonen for x -varen, som en funksjon bare av p ; dvs.

$$x^{\alpha-1} = \frac{p}{A\alpha} \Leftrightarrow x(p) = \left[\frac{p}{A\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = (A\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} p^{\frac{1}{\alpha-1}} := kp^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Fra budsjettbetingelsen finner vi: $y = m - px(p) = m - kp^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = y(p, m)$

- ii) Fra disse etterspørselsfunksjonene har vi:

$$x'(p) = \frac{1}{\alpha-1} kp^{\frac{1}{\alpha-1}-1} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{x(p)}{p} < 0 \text{ siden } 0 < \alpha < 1$$

$$\frac{\partial y(p, m)}{\partial m} = 1 \quad \& \quad \frac{\partial y(p, m)}{\partial p} = -k \frac{\alpha}{\alpha-1} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} = -k \frac{\alpha}{\alpha-1} p^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1} x(p)$$

Når x -varen blir dyrere, vil etterspørselen etter x -varen gå ned, mens den for y -varen vil gå opp. Når inntekten øker, vil kun etterspørselen etter y -varen øke, mens etterspørselen etter x -varen ikke påvirkes.

- iii) Samlet utgift til x -varen er $px(p) = kp^{\frac{1}{\alpha-1}+1} = kp^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. Elastisiteten av

$$\text{konsumutgiften med hensyn på } p, \text{ er } El(px(p): p) = \frac{\alpha}{\alpha-1} < 0 \text{ som}$$

viser at vi har elastisk etterspørsel: Konsumutgiften til varen synker når prisen øker; dvs. at den relative kvantumsnedgangen overstiger den relative prisøkningen.

- iv) Med $A = 1, \alpha = \frac{1}{2}$, har vi $k = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ og $x(p) = \frac{1}{4} p^{-2} = \left(\frac{1}{2p}\right)^2$ og

$$y(p, m) = m - kp^{-1} = m - \frac{1}{4p}. \text{ Dermed følger verdifunksjonen eller}$$

$$\text{den indirekte nyttefunksjonen } V(p, m) = y(p, m) + \sqrt{x(p)} = m + \frac{1}{4p} \text{ og}$$

$$\text{det følger rett fram at } \frac{\partial V(p, m)}{\partial p} = -\frac{1}{4p^2} = -\left(\frac{1}{2p}\right)^2 = -x(p).$$

Ved sensur:

Tematisk er denne oppgaven midt i pensum; kandidaten skal testes i utledning (sentralt) og matematiske operasjoner på kjente funksjoner. Det

punktet som kan skille de gode fra de mindre gode er punkt iii). Noen vil kanskje ha problemer med å klassifisere elastiske goder etter hvordan konsumutgiften til godet varierer med prisen. Spørsmål iv) er en sjekk på utledning og derivasjon.

Oppgave 4.

- i) De antatte egenskapene ved produktfunksjonen $x_1 = f(n)$; at arbeidskraftens grenseproduktivitet $\frac{df(n)}{dn} = f'(n) > 0$, men avtakende; dvs. $f''(n) < 0$ og at $f(0) = 0$, betyr: Vi får ikke noe produkt uten arbeidsinnsats (arbeidskraft er en essensiell faktor), bidraget fra en marginal arbeidstime er positivt, men lavere jo flere timer som er satt inn.
- ii) Etterspørselsfunksjonen for arbeidskraft for denne bedriften, skrevet som $n(w, p_1)$, når dens eiere maksimerer overskuddet til gitt pris per enhet av ferdigvaren (p_1) og gitt lønn per enhet arbeidskraft (w), følger av å løse følgende problem: Profitten som funksjon av n er: $\pi(n) = p_1 f(n) - wn$. Denne skal maksimeres med hensyn på n . Fra profittuttrykket finner vi:
 $\pi'(n) = p_1 f'(n) - w$ og $\pi''(n) = p_1 f''(n) < 0$. Siden vi regner med indre løsning, finnes det en entydig arbeidsinnsats ($n = n^*$) som oppfyller $\pi'(n^*) = p_1 f'(n^*) - w = 0$. Fordi 2.ordensbetingelsen for et maksimum er oppfylt, følger det ønskede nivået fra 1.ordensbetingelsen. Denne bestemmer ønsket bruk av arbeidskraft (lik etterspørselen) generelt skrevet som $n(w, p_1)$.
 Noen vil kanskje "løse" denne:
 $f'(n(w, p_1)) = \frac{w}{p_1} \Rightarrow n(w, p_1) = (f')^{-1}\left(\frac{w}{p_1}\right) := h\left(\frac{w}{p_1}\right)$ med $h(\cdot)$ som den inverse av f' .
- iii) Ved implisitt derivasjon av tilpasningsbetingelsen $p_1 f'(n) - w = 0$, og vi samtidig bruker at $n(w, p_1)$, ser vi direkte at

$$p_1 f''(n) \cdot \frac{\partial n(w, p_1)}{\partial w} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial n(w, p_1)}{\partial w} = \frac{1}{p_1 f''} < 0$$
. Arbeidsinnsatsen synker når lønna øker. Videre ser vi at en k-dobling av w og p_1 ikke påvirker bedriftens tilpasning, siden tilpasningsbetingelsen er upåvirket. (Tolkning: Uansett hva slags "valuta" arbeidskraft og ferdigvaren noteres i, vil tilpasningen være den samme.)
- iv) Kostnadsminimeringsproblemet til bedriften kan skrives som:

$$\text{Min}_{(N, E)} \left\{ wN + qE \mid F(N, E) = x_2^0(\text{gitt}) \right\}$$
 når vi antar at produktfunksjonen er gitt som $F(N, E) = AN^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$. Vi har konstant skalautbytte og isokvanter som er "krummet mot origo". Siden vi

har antatt at dette kostnadsminimeringsproblemet har indre løsning, vet vi at det finnes en konstant λ slik at den kostnadsminimerende faktorkombinasjonen (N^*, E^*) må oppfylle følgende betingelser:

$$\frac{\partial L(N^*, E^*, \lambda)}{\partial N} = w - \lambda \frac{\partial F(N^*, E^*)}{\partial N} = w - \lambda \frac{1}{2} \frac{x_2^0}{N^*} = 0$$

$$\frac{\partial L(N^*, E^*, \lambda)}{\partial E} = q - \lambda \frac{\partial F(N^*, E^*)}{\partial E} = q - \lambda \frac{1}{2} \frac{x_2^0}{E^*} = 0$$

Vi kan eliminere Lagrangemultiplikatoren og kommer fram til

$$\text{''tangeringsbetingelsen''}: MTSB(N^*, E^*) = \frac{F_N(N^*, E^*)}{F_E(N^*, E^*)} = \frac{w}{q}, \text{ der } MTSB$$

angir den marginale tekniske substitusjonsbrøk. Denne angir det marginale tekniske bytteforholdet for gitt produksjon; dvs. hvor mange enheter energi som kan frigjøres per enhets økning i arbeidsinnsatsen, og uten at produksjonen endres.

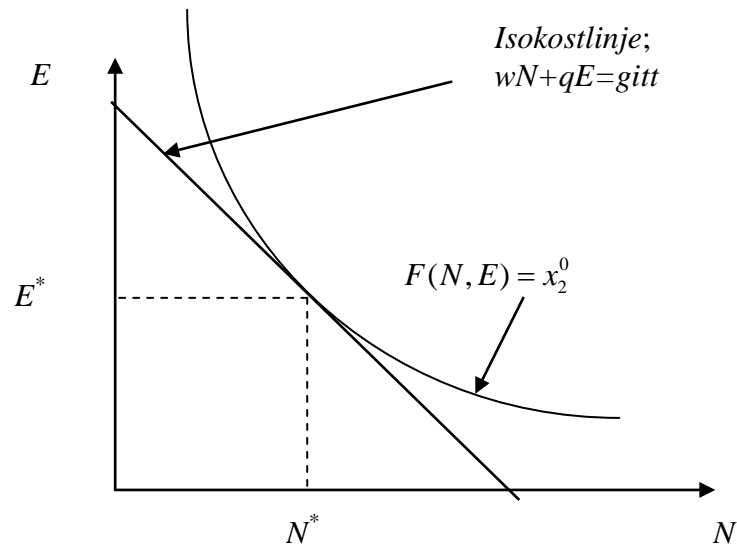
''Tangeringsbetingelsen'', sammen med produksjonskravet $x_2^0 = F(N, E)$, gir to likninger til å bestemme faktorfunksjonene (eller betingede faktoretterspørselsfunksjoner) $N(w, q, x_2^0)$ og $E(w, q, x_2^0)$. Siden disse betingelsene må gjelde uansett hvor mye som skal produseres (gitt at vi har indre løsning), kan vi skrive $N(w, q, x_2)$ og $E(w, q, x_2)$. Med den spesifiserte Cobb-Douglas funksjonen, følger det at tangeringsbetingelsen kan skrives som $\frac{E}{N} = \frac{w}{q}$; dvs. $E = \frac{w}{q} N$ som vi kan sette inn i produktfunksjonen

(med gitt produktmengde): Dette gir $x_2 = A\sqrt{NE} = A\sqrt{\frac{w}{q}N^2} = AN\sqrt{\frac{w}{q}}$,

som gir $N(w, q, x_2) = \frac{1}{A}(\sqrt{\frac{q}{w}}) \cdot x_2$. Setter vi dette inn i $E = \frac{w}{q} N$, finner

vi $E(w, q, x_2) = \frac{w}{q} \frac{x_2}{A} \sqrt{\frac{q}{w}} = \frac{x_2}{A} \cdot (\sqrt{\frac{w}{q}})$. For gitt produktmengde (gitt

isokvant) og for gitte faktorpriser (eller mer korrekt gitt faktorprisforhold), kan løsningen illustreres som i figuren under:



- v) Kostnadsfunksjonen, $C(w, q, x_2)$, er nå den minimerte verdien av samlet faktorutlegg:
- $$C(w, q, x_2) = wN(w, q, x_2) + qE(w, q, x_2) = w \frac{x_2}{A} \sqrt{\frac{q}{w}} + q \frac{x_2}{A} \sqrt{\frac{w}{q}} = \frac{2}{A} (\sqrt{wq}) \cdot x_2.$$
- vi) Kostnaden er lineær i (eller proporsjonal med) produktmengden; dvs. vi kan skrive $C(w, q, x_2) = \phi(w, q) \cdot x_2$, der $\phi(w, q) = \frac{2}{A} \sqrt{wq}$ er enhetskostnadsfunksjonen. Vi ser at
- $$\frac{C(w, q, x_2)}{x_2} = \phi(w, q) = \frac{\partial C(w, q, x_2)}{\partial x_2};$$
- gjennomsnittskostnaden er lik grensekostnaden; uavhengig av produksjonsskalaen.
- vii) Vi skal vise at $N(w, q, x_2) = \phi_w(w, q) \cdot x_2$, der $\phi_w(w, q) = \frac{\partial \phi(w, q)}{\partial w}$ er den partielle deriverte av enhetskostnaden med hensyn på lønna. Vi har at
- $$\frac{\partial C(w, q, x_2)}{\partial w} = \phi_w(w, q) \cdot x_2 = \frac{1}{2} \frac{2}{A} w^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \cdot x_2 = \frac{x_2}{A} \sqrt{\frac{q}{w}} = N(w, q, x_2)$$
- som skulle vises. Så lenge vi bruker noe arbeidskraft, vil $\phi_w(w, q) > 0$. Når faktorutlegget er minimert, vil en økning i lønna føre til økte kostnader.
- viii) Vi skal forklare hvorfor enhetskostnadsfunksjonen $\phi(w, q)$ har følgende egenskaper:

$$\phi_{ww}(w, q) = \frac{\partial^2 \phi(w, q)}{\partial w^2} < 0, \phi_{wq}(w, q) = \frac{\partial^2 \phi(w, q)}{\partial w \partial q} > 0$$

Den direkte annenderiverte er negativ siden økt lønn (som følge av substitusjon for gitt produksjon) vil føre til mindre bruk av arbeidskraft og mer bruk av energi; derfor er $\phi_{ww} < 0$, siden vi må

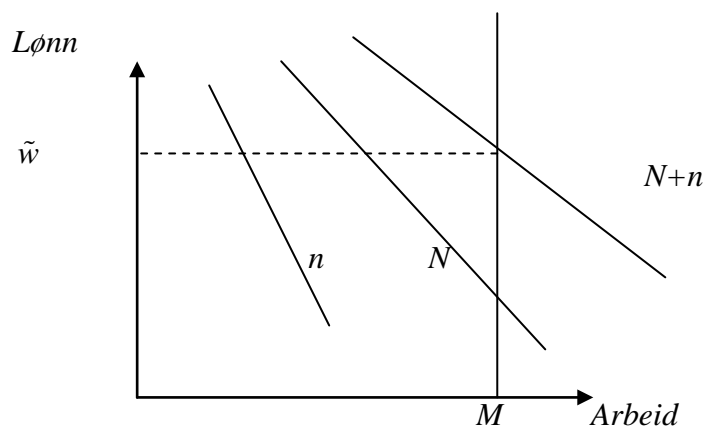
ha: $\frac{\partial N(w, q, x_2)}{\partial w} = \phi_{ww}(w, q) x_2 < 0$. Videre, siden økt pris på energi vil

føre til mer bruk av arbeidskraft (ved at vi erstatter den relativt

dyrere produksjonsfaktoren energi med arbeid), må $\phi_{wq} > 0$. (Siden vi kan vise, ikke nødvendig her, at $E(w, q, x_2) = \phi_q(w, q)x_2$, vil høyere lønn føre til økt bruk av energi; dvs. $\frac{\partial E(w, q, x_2)}{\partial w} = \phi_{wq}(w, q)x_2 > 0$,

nettopp fordi vi bruker mindre arbeidskraft. Med positive grenseproduktiviteter, må bruken av energi derfor øke når lønna øker. Her er det meningen at kandidaten skal forklare hva som ligger i substitusjon.)

- ix) For gitt pris på vare 1, gitt pris på energi og gitt mengde av vare 2, vil samlet etterspørsel, for en gitt lønn, være $n(w, p_1) + N(w, q, x_2)$. For at denne etterspørselen skal være lik det eksogent gitte tilbudet M , må lønna ta en helt bestemt verdi, nemlig \tilde{w} , slik som illustrert i figuren under der samlet etterspørsel fremkommer som horisontal summering av de to etterspørselssammenhengene (som funksjoner av lønna og for andre eksogene størrelser som konstanter), og med tilbudet som gitt og uavhengig av lønna. Likevektslønna, \tilde{w} , må da oppfylle likevektsbetingelsen $\phi_w(\tilde{w}, q) \cdot x_2 + n(\tilde{w}, p_1) = M$



En lønn høyere (lavere) enn \tilde{w} , vil gi tilbudsoverskudd (etterspørselsoverskudd); og kan dermed ikke være en likevekt. At vi kan skrive likevektslønna som $\tilde{w} = W(p_1, q, x_2, M)$, betyr at for endringer i en eller flere eksogene størrelser, vil beliggenheten på de to etterspørselssammenhengene bli påvirket (gjennom positive eller negative skift), med den følge at likevektslønna må endres. Her skal kandidaten vise hvordan \tilde{w} påvirkes av at

- energiprisen (q) øker partielt
- tilbudet av arbeidskraft (M) øker partielt

Ved implisitt derivasjon av $\phi_w(\tilde{w}, q) \cdot x_2 + n(\tilde{w}, p_1) = M$, når vi bruker at $\tilde{w} = W(p_1, q, x_2, M)$, følger:

- Energiprisen q øker:

$$\phi_{ww}x_2 \frac{\partial W}{\partial q} + \phi_{wq}x_2 + \frac{\partial n}{\partial w} \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{-\phi_{wq}x_2}{\phi_{ww}x_2 + \frac{\partial n}{\partial w}} > 0$$

der nevneren er negativ; jfr. iii) der vi fant $\frac{\partial n}{\partial w} = \frac{1}{p_1 f''} < 0$, og $\phi_{ww} < 0$ fra viii), samtidig som vi i viii) viste at $\phi_{wq} > 0$. Begrunnelsen er: Når q øker, vil bedrift 2 bruke mindre energi og mer arbeidskraft for å produsere den gitte mengden av vare 2. Dette skifter etterspørselen etter arbeidskraft i bedrift 2 opp; for uendret lønn vil bedriften ønske å bruke mer arbeidskraft enn det som er tilgjengelig. For å få realisert disse ønskene, må lønna øke for at bedrift 1 skal være villig til å gi fra seg arbeidskraft i og med at samlet tilbud er uendret. (I figuren vil den høyere energiprisen gi et positivt skift i $N(w, q, x_2)$, med den konsekvens at aggregert etterspørsel også øker.)

- Tilbudet av arbeidskraft M øker: Ved implisitt derivasjon av likevektsbetingelsen med hensyn på M , finner vi:

$$\phi_{ww}x_2 \frac{\partial W}{\partial M} + \frac{\partial n}{\partial w} \frac{\partial W}{\partial M} = 1 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{1}{\phi_{ww}x_2 + \frac{\partial n}{\partial w}} < 0$$

Lønna må gå ned når tilbudet av arbeidskraft øker. Dette ser vi lett i figuren når tilbudskurven skifter mot høyre. For at bedriftene skal være villige til å ta i mot det økte tilbudet, må lønna gå ned, sålenge de øvrige eksogene faktorene er uendret.

Ved sensur:

Oppgave 4 er stor, kanskje noe krevende og i en (igjen kanskje, noe uvant form). Legg vekt på hva kandidaten har fått til. De tre første punktene burde være rett fram; iv) – ix) er kanskje for "feinschmeckere", særlig de siste punktene. Det er lett å regne feil, så derfor er det viktig å sjekke om kandidaten skjønner det som er problemet.

Legg derfor **ikke** så mye vekt på det som ikke er gjort, og mer på det som er levert inn ved vurderingen.

De to første matematikkoppgavene bør skille rimelig godt. De fleste bør klare a) og b) under oppgave 1, samt formulere maksimeringsproblemet i oppgave 2.

Oppgavesettet ble nok oppfattet som arbeidskrevende, og på noen punkter litt uvant. For å stå til eksamen, må i hvert fall noe på oppgave 1 og 3 være besvart (noenlunde) riktig. For å få en C eller bedre, bør også noe fra oppgave 4 være besvart, så lenge de andre oppgavene er tilfredsstillende besvart.