

Sensorveiledning

Eksamen ECON 2200,

Våren 2013

Oppgave 1 (8 poeng, Ett poeng per derivasjon, dvs, 2 poeng i e og f.)

Deriver følgende funksjoner. Deriver med hensyn på begge argumenter i e) og f).

$$\text{a) } f(x) = x^2 - \ln x \quad f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$\text{c) } f(x) = e^{-x^2} \quad f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x}{g(x)} \quad f'(x) = \frac{g(x) - xg'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\text{e) } F(x, y) = (x - y)^2 \quad F'_x(x, y) = 2(x - y) \quad F'_y(x, y) = -2(x - y)$$

$$\text{f) } f(t, s) = \ln(t - s) + \ln(t + s) \text{ der } t > s > 0 \quad f'_t(t, s) = \frac{1}{t - s} + \frac{1}{t + s}, f'_s(t, s) = -\frac{1}{t - s} + \frac{1}{t + s}$$

Oppgave 2 (4 poeng) Sant eller galt?

For hver av disse påstandene, avgjør om de er sanne eller gale:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^4 (2i + 3) = \sum_{i=3}^6 (2i - 1)$$

Sant

$$\text{b) } \ln(e + x) = 1 + x$$

Usant

$$\text{c) } \frac{6y + 2x}{xy + 1} = \frac{6 + 2x}{x + 1}$$

Usant

$$\text{d) } e^{2\ln x} = x^2$$

Sant

Oppgave 3 (7 poeng).

Betrakt funksjonen $f(x) = 3 \ln x - x$.

- Finn stasjonærpunktet til funksjonen.
- Tilfredsstiller funksjonen andreordensbetingelsen for et globalt maksimum eller minimum?
- Finn maksimum for $f(x)$ når $0 \leq x \leq 2$.

Svar: FOB: $3/x=1$, Stasjonærpunkt $x=3$. $f''(x)=-3/x^2 < 0$, og $f'(x) > 0$ for $x < 3$, så maksimum i «hjørne» $x=2$.

Oppgave 4 (8 poeng).

- Vis at funksjonen $f(x, y) = x^2 y^2 - 2x - 2y$ har et stasjonærpunkt i $x = y = 1$.
- Sjekk andreordensbetingelsen, og avgjør om stasjonærpunktet er et maksimum, et minimum eller ingen av delene.

Svar: FOB $2xy^2 - 2 = 0; 2x^2y - 2 = 0$ har løsning $x = y = 1$.

$f''_{xx}(x, y) = 2y^2 \geq 0, f''_{yy}(x, y) = 2x^2 \geq 0$ som tyder på minimum, men

$f''_{yx}(x, y) = 4xy$ så, $f''_{yy} f''_{yy} - (f''_{yx})^2 = 4x^2 y^2 - 16x^2 y^2 = -12x^2 y^2 \leq 0$. Tilstrekkelige betingelser ikke tilfredsstillt.

Oppgave 5 (6 poeng, for hver deloppgave gis 1 for rett svar og inntil 2 for begrunnelsen).

Sant eller usant? Begrunn svaret

- Dersom et gode er normalt, kan det ikke være et Giffen-gode.
- Nyttefunksjonene $u(x, y) = xy$ og $v(x, y) = \ln x + \ln y$ representerer de samme preferansene.

Oppgave 6 (5 poeng).

La y være implisitt gitt som funksjon av x gjennom ligningen $y^2 x^3 + 3 = xy$.

- a) Hva blir den deriverte av y med hensyn på x , dvs y' ?

$$3y^2x^2 + 2yx^3y' = y + xy' \quad \text{så} \quad 3y^2x^2 - y = (x - 2yx^3)y' \quad \text{eller} \quad y' = \frac{3y^2x^2 - y}{x - 2yx^3}$$

Oppgave 7 (2 poeng riktig på hvert underspørsmål; max 10 poeng)

Ta utgangspunkt i tilpasningen til en nyttemaksimerende konsument med gitt inntekt og med preferanser over to varer som hver kjøpes til gitte priser. Du skal vurdere om følgende utsagn er sant eller galt:

- a) Den direkte substitusjonsvirkningen av en prisøkning kan være positiv om varen vi ser på er mindreverdig i etterspørselen. *Svar: Galt*
- b) Hvis begge varepriser øker proporsjonalt, vil tilpasningen være uendret. *Svar: Galt*
- c) Hvis en av varene har inntektselasitsitet (Engelastisitet) større enn én, må den andre varen ha tilsvarende elastisitet mindre enn én. *Svar: Riktig*
- d) Du får oppgitt at den direkte Cournotelastisiteten for vare 1, $e_{11} = -2$, at budsjettandelen for den andre varen $\alpha_2 = 0,6$ og at vare 2 har en inntektselastisitet $E_2 = 2$. Da må vare 1 ha en direkte Slutskyelastisitet S_{11} og en inntektselastisitet E_1 , gitt ved $S_{11} = -3,2$ og $E_1 = 2$. *Svar: Galt*
- e) Samme informasjon som i spørsmål d, men nå er påstanden $S_{11} = -2,2$ og $E_1 = -0,5$. *Svar: Riktig*

(Sensorhint: Under d og e må en benytte Slutskylikningen $e_{ij} = S_{ij} - \alpha_j E_i$, samt at

$$\sum_j \alpha_j E_j = 1 \quad \text{og} \quad \sum_j \alpha_j = 1.)$$

Oppgave 8 (Max 16 poeng)

En bedrift produserer en vare i mengde x med en produktfunksjon $x = An^\alpha$, med A og α som positive konstanter, men med $\alpha < 1$. Du kan oppfatte n som en vilkårlig produksjonsfaktor.

- a) Utled gjennomsnitts- og grenseproduktivitet for denne produktfunksjonen. Vis ved derivasjon hvordan gjennomsnittsproduktiviteten varierer med n . (2

poeng) *Svar:* Kaller vi $x = F(n) = An^\alpha$, vil vi ha at $\frac{x}{n} = An^{\alpha-1}$ og

$F'(n) = \alpha An^{\alpha-1} = \alpha \frac{x}{n} < \frac{x}{n}$ siden $\alpha < 1$. Videre har vi at

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{x}{n} \right) = A(\alpha - 1)n^{\alpha-2} < 0.$$

- b) Vis hvordan samlede kostnader ved produksjon av x enheter av varen kan utledes når faktorprisen er q . (2 poeng) *Svar:* Nødvendig faktorbruk ved

produksjon av x enheter følger direkte fra produktfunksjonen som $n = \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$,

slik at kostnadene ved å produsere x enheter til pris q per enhet av n , følger som: $C(x; q) = A^{-\frac{1}{\alpha}} q x^{\frac{1}{\alpha}}$

- c) Utled grense- og gjennomsnittskostnad. Hva kan du si om forløpet til gjennomsnittskostnaden? (2 poeng) *Svar:* Grensekostnaden er

$$C'(x; q) = A^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{q}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} \text{ og } \bar{C} = \frac{C}{x} = A^{-\frac{1}{\alpha}} q x^{\frac{1}{\alpha}-1} = \alpha C'(x, q) < C'(x, q). \text{ Forløpet til}$$

gjennomsnittskostnaden er at den er stigende all den tid grensekostnaden er høyere enn gjennomsnittskostnaden. Ved derivasjon finner vi

$$\frac{d\bar{C}}{dx} = \frac{C'x - C}{x^2} = \frac{1}{x} [C' - \bar{C}] = \frac{C'}{x} (1 - \alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) A^{-\frac{1}{\alpha}} q x^{\frac{1}{\alpha}-2} > 0$$

Anta at denne bedriften selger ferdigvaren i et marked til gitt pris p , som prisfast kvantumstilpasser. Målet er å maksimere profitten.

- d) Still opp et uttrykk for profitten og utled førsteordensbetingelsen for et profittmaksimum (dvs. bestem den x som maksimerer profitten). Kan du være sikker på at denne betingelsen faktisk løser profittmaksimeringsproblemet? Begrunn svaret ditt! (4 poeng) *Svar:* Profitten

er $\pi(x) = px - C(x; q) = px - A^{-\frac{1}{\alpha}} q x^{\frac{1}{\alpha}}$. Vi har at

$$\pi'(x) = p - C'(x; q) = p - A^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{q}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1}. \text{ Vi ser at } \pi'(0) = p > 0 \text{ og at } \pi' \text{ går mot}$$

et negativt tall bare produksjonen blir stor nok; samtidig som $\pi'' < 0$.

Dermed må løsningen på problemet være entydig bestemt fra

førsteordensbetingelsen $\pi'(x^*) = p - C'(x^*; q) = 0$.

- e) Utled tilbudsfunksjonen for det ferdige produktet og vis hvordan tilbud kvantum varierer med hhv.

- en partiell økning i produktprisen (2 poeng)
- en partiell økning i faktorprisen (2 poeng)
- en proporsjonal økning i de to prisene p og q . (2 poeng)

Svar: Fra førsteordensbetingelsen finner vi da tilbudsfunksjonen som

$$x^T = s(p, q) = \left[\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \frac{p}{q} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \underbrace{\left(\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_{:=K} p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} q^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \text{ Vi ser at } \frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{s(p, q)}{p} > 0 \text{ og}$$

selvfølgelig at $\frac{\partial s}{\partial q} = \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{s(p, q)}{q} < 0$. Videre ser vi at $s(tp, tq) = s(p, q)$; dvs.

tilbudsfunksjonen er homogen av grad null i prisene.

Oppgave 9 (4 poeng)

En produktfunksjon $F(n, k)$ antas å være homogen av grad én i (n, k) . Forklar hva en slik antakelse betyr!

Svar: Her skal en kort fortelle at dette er ekvivalent med konstant skalautbytte og innebærer at $F(tn, tk) = tF(n, k)$: En t-dobling av alle faktorinnsatser gir en t-dobling i produktmengden.

Oppgave 10 (17 poeng)

Anta at en arbeidstaker/konsument har en nyttefunksjon $U(c, f) = f + \theta \ln c$, over konsum c , og fritid, målt i timer, f . Det antas at θ er en positiv konstant, mens \ln angir den naturlige logaritmen. Konsumenten har et tidsbudsjett $f + n = T$, der n er arbeidstid målt i timer, mens T er samlet antall timer til disposisjon.

Konsumenten opptrer som prisfast kvantumstilpasser både i konsumvaremarkedet og i arbeidsmarkedet, med p som pris per enhet av konsumvaren og med w som lønn per time arbeidet. I tillegg til arbeidsinntekt mottar også arbeidstaker en stønad på S kroner, slik at inntekten $wn + S$ i sin helhet finansierer konsumutgiften pc .

- a) Bestem den marginale substitusjonsbrøk mellom fritid og konsum og angi egenskaper ved denne. Hva uttrykker den marginale substitusjonsbrøk? (2 poeng) *Svar:* Den marginale substitusjonsbrøk angir generelt det subjektive bytteforholdet mellom et par av goder for gitt nyttenivå; og er definert som

$$\left[-\frac{dc}{df} \right]_{U=\text{konst}} = MSB = \frac{U_f}{U_c} \text{ og forteller, for gitt nytte, hvor mye mer konsum en}$$

må ha i kompensasjon for å jobbe en time til (avstå en time fritid). Her finner

vi at $\frac{U_f}{U_c} = \frac{1}{\frac{\theta}{c}} = \frac{c}{\theta}$, som er lavere (større) jo mindre (større) c er;

indifferenskurvene krummer mot origo.

- b) Utled den nyttemaksimerende tilpasningen av konsum og fritid ved hjelp av Lagranges metode. (3 poeng) *Svar:* Vi setter opp Lagrangefunksjonen med λ som Lagrangemultiplikator, idet vi kan skrive budsjettbetingelsen inkl.

tidsbudsjettet som $pc = wn + S = w(T - f) + S \Leftrightarrow pc + wf = wT + S$:

$L = f + \theta \ln c - \lambda [pc + wf - wT - S]$. Tilpasningsbetingelsene for indre

løsning er:

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 1 - \lambda w = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial c} = \frac{\theta}{c} - \lambda p = 0, \quad \text{samt at budsjettbetingelsen må holde.}$$

- c) Under hvilke betingelser vil det bli tilbudt et positivt antall arbeidstimer? Gi en tolkning av denne betingelsen. (2 poeng) *Svar:* Generelt er det slik at om

$MSB(c = \frac{S}{p}, f = T) > \frac{w}{p}$; dvs. dersom reservaslønna for å jobbe i det hele

tatt (fra et utgangspunkt med $f = T$) er større enn reallønna; dvs. om

$$\frac{\frac{S}{p}}{\theta} = \frac{S}{p\theta} > \frac{w}{p} \Leftrightarrow \frac{S}{w} > \theta, \quad \text{da vil det ikke bli tilbudt arbeidstimer. Stønadsbeløpet}$$

vurdert i timer er høyere enn θ .

- d) Fastlegg etterspørselsfunksjonen for konsum og tilbudsfunksjonen for arbeid, når du også tar hensyn til at i noen tilfeller kan konsumenten finne det

ønskelig ikke å tilby arbeid. (4 poeng) *Svar:* Vi kan sette inn for $\lambda = \frac{1}{w}$ inn i

den andre betingelsen som da blir: $\frac{\theta}{c} = \frac{p}{w} \Leftrightarrow c = \theta \frac{w}{p}$ som er

etterspørselsfunksjonen for konsumvaren. Setter vi så $pc = w\theta$ inn i

budsjettbetingelsen, finner vi

$$wf = wT + S - w\theta \Rightarrow f = T - \theta + \frac{S}{w} \Rightarrow n = T - f = \theta - \frac{S}{w}. \quad \text{Vi så i forrige}$$

punkt at dersom $\frac{S}{w} > \theta$, vil $f = T$ og $n = 0$.

- e) Anta at det tilbys arbeidstimer. Hvordan varierer konsum og arbeidstilbud, angitt ved elastisiteter, når

- konsumvaren blir dyrere (2 poeng) *Svar:* Når p øker, har vi $El_p c = -1$, mens n er upåvirket.

- lønna øker (2 poeng) Svar: Når w øker, vil $El_w c = 1$, mens $\frac{\partial n}{\partial w} = \frac{S}{w^2} > 0$,

$$\text{slik at } El_w n = \frac{w}{n} \frac{\partial n}{\partial w} = \frac{w}{n} \frac{S}{w^2} = \frac{S}{wn}$$

- stønadsbeløpet øker (2 poeng) Svar: Når S øker, vil $El_S c = 0$ og

$$\frac{\partial n}{\partial S} = -\frac{1}{w} < 0, \text{ slik at } El_S n = \frac{S}{n} \frac{\partial n}{\partial S} = -\frac{S}{wn}$$

Oppgave 11 (15 poeng)

Betrakt et fullkomment konkurransemarked for en vare i et land.

Markedsetterspørselen for varen er gitt ved $X^E = A - p$, der X^E er etterspurt kvantum, p er prisen og A en positiv konstant.

Tilbudssiden i dette markedet består av n like bedrifter, hver med en kostnadsfunksjon $C(y) = a + by + cy^2$, med a, b og c som positive konstanter, og med y som produsert kvantum av varen i en enkelt bedrift. Hver bedrift maksimerer profitt som prisfast kvantumstilpasser.

- a) Bestem det profittmaksimerende kvantum for den enkelte bedrift. Under hvilke betingelser vil den tilby et positivt kvantum av varen? (2 poeng) Svar: Profitten til en bedrift er $\pi(y) = py - (a + by + cy^2)$ som maksimeres når

$$\pi'(y) = p - b - 2cy = 0 \text{ for } y = \frac{p-b}{2c} \text{ når } p > b. \text{ Siden } \pi'' = -2c < 0, \text{ vil, når}$$

$p > b$, førsteordensbetingelsen entydig fastlegge optimalt kvantum i en bedrift. Vi kan derfor skrive tilbudet av ferdigvaren fra den ene bedriften som

$$y^T = \frac{1}{2c}[p - b].$$

- b) Vis at markedstilbudet kan uttrykkes som $X^T = \frac{n(p-b)}{2c}$. (2 poeng) Svar: For

$$\text{en gitt pris } p > b, \text{ vil samlet tilbud være } X^T = \sum_j y_j^T = n \frac{p-b}{2c}.$$

- c) Hva må prisen være for at vi skal ha markedslikevekt? (2 poeng) Markedslikevekt krever at prisen må være slik at vi har tilbud lik etterspørsel.

Likevektsprisen må derfor oppfylle:

$$A - p^* = \frac{n(p^* - b)}{2c} \Leftrightarrow p^* \left[1 + \frac{n}{2c} \right] = A + \frac{nb}{2c} \Leftrightarrow p^* = \frac{A + \frac{nb}{2c}}{1 + \frac{n}{2c}} = \frac{2Ac + nb}{2c + n}.$$

- d) Hva skjer med prisen om A øker? Hva kan en slik økning skyldes? (2 poeng)
 Når A øker, vil p^* øke. En økning i A kan reflektere høyere inntekt hos kjøperne, samtidig som den varen vi ser på er fullverdig i etterspørselen. Et slikt skift kan også være forårsaket av at prisen på et substitutt har gått op, eller at prisen på en komplementær vare har gått ned.

Anta at tilbudssiden på hjemmemarkedet monopoliseres, og at monopolbedriften har en kostnadsfunksjon $C(X) = a + bX + cX^2$, med X som produsert kvantum.

- e) Hvilket kvantum vil monopolisten ønske å selge på markedet når den maksimerer profitt og står overfor etterspørselsfunksjonen $X^E = A - p$? Hva blir monopolprisen? (3 poeng) *Svar:* Med etterspørselen skrevet som $p = A - X$, følger monopolprofitten som $\Pi(X) = X(A - X) - (a + bX + cX^2)$, som er konkav. Denne funksjonen maksimeres der grenseinntekt (GI) er lik grensekostnad (GK), når vi antar $GI(0) = p(0) = A > b = GK(0)$; dvs.

$$A - 2X = b + 2cX \Leftrightarrow 2(1 + c) = A - b \Rightarrow X^{Mon} = \frac{A - b}{2(1 + c)} \text{ og med monopolpris}$$

gitt ved

$$p^{Mon} = A - X^{Mon} = \frac{2A(1 + c)}{2(1 + c)} - \frac{A - b}{2(1 + c)} = \frac{2A + 2Ac - A + b}{2(1 + c)} = \frac{A(1 + 2c) + b}{2(1 + c)}.$$

Sett nå at det åpner seg en ny mulighet for monopolisten; ikke bare kan den selge hjemme som en monopolist, den kan også selge varen på verdensmarkedet til en gitt pris Q .

- f) Når vil monopolisten finne det lønnsomt å selge på verdensmarkedet? Hvordan vil denne beslutningen påvirke omsatt kvantum og pris på hjemmemarkedet? (4 poeng) *Svar:* Dersom

$$Q > GI(X^{Mon}) = A - 2 \frac{A - b}{2(1 + c)} = \frac{A(1 + c) - A + b}{1 + c} = \frac{Ac + b}{1 + c}, \text{ da vil det lønne}$$

seg å selge ute. Tilpasningen er nå kjennetegnet ved: Maksimer profitten nå skrevet som

$$\Pi(X^H + X^U) = QX^U + (A - X^H)X^H - [a + b(X^H + X^U) - c(X^H + X^U)^2], \text{ med}$$

maksimum kjennetegnet ved: $Q = A - 2X^H = b + 2c(X^H + X^U)$, som gir

$$X^H = \frac{A - Q}{2}, \quad X^U = \frac{Q(1 + c) - (Ac + b)}{2c} \quad \text{og}$$

$$\begin{aligned} p^H = A - X^H &= \frac{2A - A + Q}{2} = \frac{A + Q}{2} > \frac{A + \frac{Ac+b}{1+c}}{2} = \frac{A(1+c) + Ac + b}{2(1+c)} \\ &= \frac{A(1+2c) + b}{2(1+c)} = p^{Mon} \end{aligned}$$

Den nye prisen hjemme er høyere enn den tidligere monopolprisen; dermed må kvantum omsatt hjemme være lavere enn i det rene monopoltilfellet.

(Siden grensekostnaden nå må være høyere når $q > GI(X^{Mon})$, vil det bety at samlet produksjon alt i alt øker.)