**Oppgave 1 (8 poeng)**

Deriver følgende funksjoner. Deriver med hensyn på begge argumentene i e) og f).

a) $f(x) = x^3 - x^{-2} - 2 \quad f'(x) = 3x^2 + 2x^{-3}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $f(x) = e^{g(x)} \quad f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$

d) $f(x) = \dfrac{g(x)}{x} \quad f(x) = \dfrac{g'(x)x - g(x)}{x^2}$

e) $F(x,y) = \left(x - \dfrac{1}{y}\right)^3 \quad F'_x(x,y) = 3\left(x - \dfrac{1}{y}\right)^2 \quad F'_y(x,y) = 3\left(x - \dfrac{1}{y}\right)^2 \dfrac{1}{y^2}$

f) $f(s,t) = e^{s-t} - e^{s+t} \quad f'_s(s,t) = e^{s-t} - e^{s+t} \quad f'_t(s,t) = -e^{s-t} - e^{s+t}$

**Oppgave 2 (5 poeng) Sant eller galt?**

For hver av disse påstandene, avgjør om den er sann eller usann.

a) $\sum_{i=1}^{5}(4+i)^2 = \sum_{i=5}^{9} i^2$ **Sant**

b) $\ln(3e^x) = x^3$ **Usant**

c) $\dfrac{2x+6}{2x} = \dfrac{x+3}{x}$ **Sant**

d) $\ln(x+y) = \ln x \cdot \ln y$ **Usant**

e) Om $f(x,y) = x^2 y - \ln y$ så er $df = 2xydx + \left(x^2 - \dfrac{1}{y}\right)dy$. **Sant**

**Oppgave 3 (10 poeng)**

Betrakt funksjonen $f(t) = \max_x \left(tx - e^x\right)$ for $t > 0$.

a) Finn, ved hjelp av omhyllingssetningen, et uttrykk for $f'(t)$ uten først å løse maksimeringsproblemet. $f'(t) = x^*$

b) Løs maksimeringsproblemet og vis at $f(t) = t\left(\ln t - 1\right)$.

FOB: $t = e^x$ gir $x = \ln t$. Insatt $f(t) = \left(t \ln t - t\right)$

c) Vis at andreordensbetingelsen for maksimeringen i b) er tilfredsstilt.

Deriverer to ganger: $-e^x < 0$

d) Bruk svaret i b) til å finne $f'(t)$.

$f(t) = \left(t \ln t - t\right)$ gir $f'(t) = \ln t + \frac{t}{t} - 1 = \ln t$

e) Oppgave a) og d) vil gi to ulike uttrykk for $f'(t)$. Vis at svarene likevel er de samme. $x^* = \ln t$

**Oppgave 4 (10 poeng)**

La $f(x, y)$ være en gitt funksjon og $(x_0, y_0)$ være et stasjonærpunkt.

a) Forklar hva vi mener med at punktet er et stasjonærpunkt.

$f'_y = f'_x = 0$

Anta videre at

$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ and } f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

og at

$$f''_{xx}(x_0, y_0)\, f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

b) Forklar hvorfor vi ikke kan konkludere med at punktet er et globalt ekstrempunkt (enten maksimum eller minimum).

Fordi AOB skal gjelde overalt.

c) Om det faktisk er et ekstrempunkt, er det da et maksimum eller minimum?

*Begge dobbeltderiverte negative, så det er en kandidat til maksimum.*

d) For å sikre at punktet er et globalt ekstrempunkt, hva mer måtte vi kreve?

*At AOB skal gjelde overalt*

**Oppgave 5 (2 poeng)**

Minimer $u(x,y)$ gitt bibetingelsen $\ln x + \ln y = 0$ ved hjelp av Lagranges metode, og vis at svaret må tilfredsstille ligninga $\frac{u'_x}{u'_y} = \frac{y}{x}$.

$$L = u(x,y) - \lambda(\ln x + \ln y)$$
$$L'_x = u'_x - \frac{\lambda}{x} = 0$$
$$L'_y = u'_y - \frac{\lambda}{y} = 0$$

Løser for l: $\lambda = xu'_x = yu'_y$ som gir den oppgitte ligningen.

**Oppgave 6**

a) Kostnadsfunksjonen angir kostnadene ved å produsere alternative mengder når enhver produktmengde produseres ved den faktorbruk som gir lavest mulig kostnader.

b)
$$\bar{c}(x) = 1 + \frac{e^x}{x}$$
$$\bar{c}'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

c)

d) $c'(x) = 1 + e^x$
$$c''(x) = e^x$$

$\bar{c}(x)$ faller til x=1 og stiger så. Grensekostnaden er stigende og skjærer gjennom minimumspunktet for enhetskostnaden.

e) $\pi = px - c(x) = px - x - e^x$

f) Når $p$ er under minimum av $\bar{c}(x)$, tilbys null. Da er altså $p < 1 + e$. Maksimer: $p - 1 - e^x = 0$. $e^x = p - 1$. $x = \ln(p-1)$ for $p > 1 + e$.

g) For $p = 1 < 1 + e$ tilbys null.

**Oppgave** 7

Økt pris på vare j gir substitusjon bort fra den varen som blir relativt dyrere. Effekten blir altså negativ for $j = i$ og positiv ellers. Vi får ren substitusjon når prisendringen kompenseres slik at nytten holdes uendret. Men ved en partiell prisøkning gis ikke kompensasjon. Forbrukeren lider et realinntektstap som er større jo mer en bruker av varen som blir dyrere. Realinntektstapet påvirker etterspørselen etter gode i via inntektseffekten. Effekten blir negativ for normale goder.

**Oppgave 8**

a) Indifferenskurven angir de kombinasjoner av forbruk i de to periodene som forbrukeren synes er like bra.

b) $S = \mathrm{m}_1 - c_1$ og $c_2 = (1+r)S + m_2$. Ved å sette første likning inn i andre og flytte om på leddene får vi $(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)\mathrm{m}_1 + m_2 = R$.

c) Det forbruk konsumenten er villig til å oppgi i periode 2 for å få en ekstra enhet forbruk i periode 1, er lik det forbruk en faktisk oppgir i periode 2 ved å forbruke en ekstra enhet i periode 1 (alternativkostnaden). En sparer da en enhet mindre og går glipp av 1+r i periode 2.

d) $S = \frac{c_2}{1+r} - \frac{m_2}{1+r}$. Vi kan tolke *R* som den totale inntekten til forbrukeren. Vi har at $\frac{\partial S}{\partial m_1} = \frac{\partial S}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial m_1} = \frac{1}{1+r}\frac{\partial c_2}{\partial R}(1+r) = \frac{\partial c_2}{\partial R} > 0$

siden forbruket er normalt gode.

**Oppgave 9**

a) Tilbud er like etterspørsel : $T\left(p\right) + S(p) = D(p)$

b) Vi har at *q*=*p*+*s*. Da er $T\left(p\right) + S(p+s) = D(p)$. Deriver mhp *s*, og la $p' = \frac{dp}{ds}$.

$$T' \cdot p' + S' \cdot (p'+1) - D' \cdot p' = 0$$

$$\left(T' + S' - D'\right) \cdot p' = -S'$$

$$p' = \frac{-S'}{\left(T' + S' - D'\right)}$$

$$q' = p' + 1 = \frac{-S'}{\left(T' + S' - D'\right)} + 1 = \frac{T' - D'}{T' + S' - D'}$$

Vi ser at $p' < 0$ og $q' > 0$.

c) La oss se på absoluttverdien til $p'$, altså $\frac{S'}{T' + S' - D'}$. Effekten er større jo større $S'$ er og jo mindre $T'$ og $-D'$ er. Den umiddelbare effekten av subsidien er at vindkraftprodusentene mottar høyere pris og tilbyr mer. Det oppstår et tilbudsoverskudd. Denne effekten er større jo større $S'$ er. For å få avsatt den økte kraftmengden og eliminere tilbudsoverskuddet må p ned for å stimulere forbruket. Andre ting like må prisen mer ned jo mindre etterspørselen reagerer på en viss prisnedsettelse. Redusert *p* vil redusere prisen produsentene mottar og dempe tilbudet og dermed tilbudsoverskuddet. Også av denne grunn må prisen mer ned jo mindre tilbyderne reagerer på prisendring.

**Oppgave 10**

$$\pi = p_1 D_1(p_1) + p_2 D_2(p_2) - c \cdot \left(D_1(p_1) + D_2(p_2)\right)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_1} = D_1(p_1) + p_1 D_1'(p_1) - c \cdot D_1'(p_1) = 0$$

$$p_1 \left\{ 1 + \frac{D_1(p_1)}{p_1 D_1'(p_1)} \right\} - c = 0$$

$$p_1 \left\{ 1 + \frac{1}{p_1 \dfrac{D_1'(p_1)}{D_1(p_1)}} \right\} - c = 0$$

Tilsvarende finner vi

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_2} = p_2 D_2'(p_2) + D_2(p_2) - c \cdot D_2'(p_2) = 0$$

$$p_2 \left\{ 1 + \frac{1}{p_2 \dfrac{D_2'(p_2)}{D_2(p_2)}} \right\} - c = 0$$

b) En økning i prisen gir større inntekt for gitt produksjon. På den annen side vil økt pris gi mindre etterspørsel og omsetning, som partielt sett reduserer inntekten, men også reduserer produksjonskostnadene.

c) Bruk omhyllingsteoremet og finn $-\dfrac{\partial \pi}{\partial c} = \left(D_1(\mathrm{p}_1) + D_2(\mathrm{p}_2)\right)$

d) En sette inn og regne som ovenfor. Enklere er det å innse at $p_1 \dfrac{D_1'(p_1)}{D_1(p_1)} = -1{,}5$ og $p_2 \dfrac{D_2'(p_2)}{D_2(p_2)} = -2$.

$$p_1 = c\left\{1 + \frac{1}{p_1 \dfrac{D_1'(p_1)}{D_1(p_1)}}\right\}^{-1} = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}5}\right)^{-1} = 18$$

$$p_2 = c\left\{1 + \frac{1}{p_2 \dfrac{D_2'(p_2)}{D_2(p_2)}}\right\}^{-1} = 6\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = 12$$

**Oppgave 11**

*Sant eller galt.*

a) *Galt.* Hvis dette var tilfellet ville en prisøkning på 1% gi mindre enn 1% fall i etterspørselen og omsetningsverdien ville øke samtidig som kostnaden ville falle og profitten ville øke. Da kunne en ikke være i optimum.

b) *Sant.* Ved konstant skalautbytte er $c'(x)$ konstant, så hvis $c'(x) = \mathrm{p}$ gjelder det for alle verdier av *x*, og *x* kan ikke bestemmes.

c) *Sant.* På grunn av homogenitet så vil samme prosentvise økning i *w*,*q* og *p* ha null effekt på tilpasningen. Da må en viss prosentvis økning i *w* og *q* ha samme effekt som den tilsvarende prosentvise reduksjon *p*. Alternativt kan en se på tilpasningsbetingelsene.

d) *Galt.* På grunn av homogenitet har vi at $S_{11} + S_{12} = 0$. Generelt er $S_{12} = \dfrac{p_2 \partial h_1}{h_1 \partial p_2} \neq \dfrac{p_1 \partial h_2}{h_2 \partial p_1} = S_{21}$, selv om $\dfrac{\partial h_1}{\partial p_2} = \dfrac{\partial h_2}{\partial p_1}$, så er $S_{11} + S_{12} = 0 \neq S_{11} + S_{21}$. Det er tilstrekkelig å få fram at det ikke er noen grunn til at de to elastisitetene i oppgaven skal summere seg til null. Det er ingen generell egenskap ved funksjonene som tilsier dette.

**Poenggrenser**

Vi har praksis for å bruke følgende poenggrenser.

A over 80 poeng

B 66-80 poeng

C 51-65 poeng

D 41-50 poeng

E 31- 40 poeng