Oppgave 1

a) $f'(x) = 6x + 2$

b) $g'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$

c)

$$F'_x = (h(x,y) + xh'_x(x,y))e^{xh(x,y)} + \frac{y-x}{(x+y)^3}$$
$$F'_y = xh'_y(x,y)e^{xh(x,y)} - \frac{2x}{(x+y)^3}$$

d)

$$G'_x = yz + \frac{1 - \ln x - \ln yx}{x^2}$$
$$G'_y = xz + \frac{1}{xy}$$
$$G'_z = xy + \frac{1}{xz}$$

e) $g(x)$ er definert så lenge $f(x) > 0$. Finn nullpunktene:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = -1 \text{ eller } x = \frac{1}{3}$$

Finn fortegnet til $f(x)$ i intervallene ved å teste noen punkter:

$x = -2$ gir $f(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 1 = 7 > 0$

$x = 0$ gir $f(0) = 3(0)^2 + 2(0) - 1 = -1 < 0$

$x = 1$ gir $f(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 1 = 4 > 0$

Dermed er $g(x)$ definert i intervallene: $x < -1$ og $x > \frac{1}{3}$

Oppgave 2

a) Usant. Anta (som i hintet) for eksempel at en funksjon $f(x) = \sqrt{x}$. Denne er definert for $x \geq 0$ og er strengt konkav fordi:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$$

Den minste mulige verdien for $f(x)$ er åpenbart når $x = 0$. For enhver annen x vil $f(x) > 0$, mens $f(0) = 0$. Dermed må $x = 0$ være et minimumspunt *på randen* av definisjonsområdet.

b) Sant. Et stasjonærpunkt for en strengt konveks funksjon må nødvendigvis være et (globalt) minimumspunkt fordi den førstederiverte på hver side av stasjonærpunktet må ha forskjellig fortegn (og være negativ til venstre og positiv til høyre for ethvert slikt punkt).

c) Usant. Vi kan ha fallende og konvekse funksjoner, for eksempel $f(x) = \frac{1}{x}$ som har:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$
$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$$

Dermed er denne funksjonen en fallende og konveks funksjon.

d) Usant. Denne funksjonen kan aldri ta negative verdier fordi:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \to 0$$
$$\lim_{x \to \infty} e^x \to \infty$$

Dermed kan ikke denne funksjonen ta negative verdier.

e) Usant. Det er generelt ikke slik at dette stemmer, fordi:

$$
\begin{aligned}
&\ln a - \ln b \\
&= \ln\left(\frac{a}{b}\right) \\
&\neq \frac{\ln a}{\ln b}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a) $\mathfrak{L} = \ln x + 2\ln y - \lambda(x^2y^2 + x + y - 3)$ med tilhørende førsteordensbetingelser:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_x &= \frac{1}{x} - \lambda(2xy^2 + 1) = 0 \\
\mathfrak{L}_y &= \frac{2}{y} - \lambda(2yx^2 + 1) = 0
\end{aligned}
$$

b) Finn først y og x ved å bruke førsteordensbetingelsene og bibetingelsen. Gitt at $\lambda \neq 0$ og $x \neq 0$ kan vi finne:

$$
\frac{y}{2x} = \frac{2xy^2 + 1}{2yx^2 + 1}
$$

Her lønner det seg å "kryssmultiplisere" på følgende måte:

$$
\begin{aligned}
2x(2xy^2 + 1) &= y(2yx^2 + 1) \\
4x^2y^2 + 2x &= 2x^2y^2 + y \\
2x^2y^2 + 2x - y &= 0
\end{aligned}
$$

Fra bibetingelsen har vi at:

$$
x^2y^2 = 3 - x - y
$$

Sett inn dette i uttrykket vi fant fra førsteordensbetingelsene:

$$
\begin{aligned}
2(3 - x - y) + 2x - y &= 0 \\
6 - 2x - 2y + 2x - y &= 0 \\
\Rightarrow y &= 2
\end{aligned}
$$

Uttrykket for x finner vi ved å sette tilbake for $y = 2$ i bibetingelsen og løse for x. Da finner vi:

$$
\begin{aligned}
4x^2 + x + 2 - 3 &= 0 \\
4x^2 + x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Annengradsformelen gir da:

$$
x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4}
$$
$$
x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}
$$

Vi vet at vi ikke kan ha den negative løsningen av roten fordi det vil resultere i at telleren blir negativ og dermed blir x negativ. Fordi vår funksjon inneholder logaritmen til x kan vi dermed ikke ha den negative løsningskandidaten, og vi står igjen med:

$$
x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}
$$

Oppgave 4

a) Sant. Dette er en nøytralelastisk vare. Dersom prisen øker med 1 prosent, reduseres etterspørselen med 1 prosent. Dermed er samlet utlegg konstant og uavhengig av prisen på varen.

b) Usant. Dersom timelønna øker er det to effekter: en inntektseffekt og en substitusjonseffekt. Inntektseffekten er at når lønna øker så blir konsumenten, ceteris paribus, rikere. Dermed ønsker konsumenten *mer av alle fullverdige goder*, også fritid. Dette er en *negativ effekt* på arbeidstilbudet. Substitusjonsvirkningen er som følger. Når lønna øker så øker prisen på fritid (eller avkastningen av å arbeide en ekstra time går opp). Dette gjør så konsumenten ønsker *mindre av det relativt dyrere godet* som her er fritid. Dette er en *positiv effekt* på arbeidstilbudet. Retningen på den totale endringen avhenger av om inntektseffekten eller substitusjonseffekten dominerer.

c) Sant. Etterspørselen etter et fullverdig gode går alltid ned når prisen på godet øker.

Oppgave 5

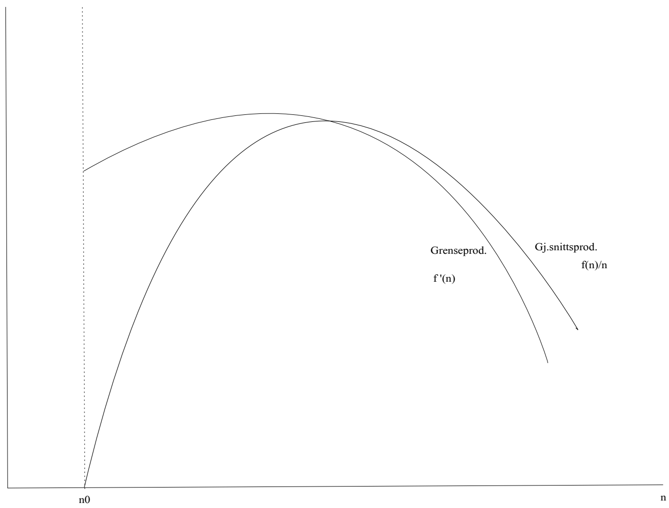
a) $f'(n) > 0$ betyr at en økning i bruk av arbeidskraft alltid vil gi økt produksjon. $f''(n) < 0$ betyr at jo flere enheter arbeidskraft bedriften bruker, jo mindre kaster den neste enheten av seg. Det betyr at produktfunksjonen er stigende og konkav.

b) c) Bedriften maksimerer profitten:

$$\max_n \Pi(n) = pf(n) - wn$$

Dette gir førsteordensbetingelsen:

$$pf'(n) - w = 0$$



Figur 1

d) Vi får at $f'(n) = \alpha n^{\alpha-1}$ som gir:

$$p\alpha n^{\alpha-1} - w = 0$$
$$\Rightarrow n = \left(\frac{w}{p}\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

e) Et subsidium s per enhet n er det samme som en reduksjon i lønna w. Dersom det innføres et subsidie s kan vi finne differensialet til n som en tilnærming til endringen i n:

$$dn = \frac{1}{\alpha-1} w^{\frac{1}{\alpha-1}-1} \left(\frac{1}{p\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} dw > 0$$

Den siste ulikheten kommer av at hvis $ds > 0$ så må $dw < 0$ og like stor som $-ds$ (altså $dw = -ds$). Dermed øker etterspørselen etter arbeidskraft dersom bedriften mottar et subsidie per enhet. Noter at uttrykket over også er likt:

$$dn = -\frac{1}{\alpha-1} w^{\frac{1}{\alpha-1}-1} \left(\frac{1}{p\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} ds > 0$$

En annen måte å løse denne oppgaven på er å direkte innse at et subsidie vil gi en ny faktoravlønning $\tilde{w} = w - s$ og sette inn at $\tilde{w} < w$ som gir at siden:

$$n = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Så må:

$$\tilde{n} = \left(\frac{\alpha p}{\tilde{w}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > n$$

Fordi nevneren blir mindre (og potensen er nå positiv etter omskrivingen).

f) En isokvant viser alle kombinasjonene av de to innsatsfaktorene som gir samme produksjonsnivå. Helningen til en isokvant, i det vi antar et produksjonsnivå $x = x_0$ finner vi ved å derivere uttrykket:

$$x_0 = n^\alpha k^{1-\alpha}$$

med hensyn på en av innsatsfaktorene ved bruk av implisitt derivasjon, i det vi antar at k er en funksjon av n til gitt produksjonsnivå x_0. Da får vi:

$$\begin{aligned} 0 = \alpha n^{\alpha-1}k^{1-\alpha} + (1-\alpha)n^\alpha k^{-\alpha}\frac{dk}{dn} \\ \Rightarrow \frac{dk}{dn} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{k}{n} < 0 \end{aligned}$$

Dette viser at helningen til isokvanten er negativ. Det er selvsagt mulig å heller anta at n er en funksjon av k og finne:

$$\frac{dn}{dk} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{n}{k} < 0$$

Oppgave 6

a) Siden konsumenten ikke har noen mulighet til å spare, vil konsumet i hver periode kun være gitt ved lønnsinntektene som er lønn ganget med arbeidstid i hver periode.

b) Konsumenten maksimerer følgende:

$$\max_{N_1,N_2,F_1,F_2,S_1,C_1,C_2} \quad u_1(C_1,F_1)+\beta u_2(C_2,F_2) \quad \text{gitt at} \quad \begin{cases} C_1 = wN_1 \\ C_2 = W(S_1)N_2 \\ \;1 = F_1+N_1+S_1 \\ \;1 = F_2+N_2 \end{cases}$$

Den enkleste løsningen er å benytte innsettingsmetoden heller enn Lagrange med fire bibetingelser. Vi løser:

$$\max_{N_1,N_2,S_1} u_1(wN_1,(1-N_1-S_1))+\beta u_2(W(S_1)N_2,1-N_2)$$

Dette gir tre førsteordensbetingelser:

$$\begin{aligned} w\frac{\partial u_1}{\partial C_1}-\frac{\partial u_1}{\partial F_1} &= 0 \\ w(S_1)\beta\frac{\partial u_2}{\partial C_2}-\frac{\partial u_2}{\partial F_2} &= 0 \\ -\frac{\partial u_1}{\partial F_1}+\beta W'(S_1)N_2\frac{\partial u_2}{\partial C_2} &= 0 \end{aligned}$$

c) Avveiningen mellom konsum og fritid i periode 1 fremkommer fra den første av disse betingelsene:

$$\begin{aligned} w\frac{\partial u_1}{\partial C_1}-\frac{\partial u_1}{\partial F_1} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\frac{\partial u_1}{\partial F_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial C_1}} &= w \qquad (1) \end{aligned}$$

Tolkning: Dersom konsumenten i periode 1 skal være villig til å avstå en time fritid krever konsumenten markedslønna i kompensasjon. Dersom konsumenten krevde mindre enn markedslønna i kompensasjon, ville konsumenten økt sitt arbeidstilbud. Dersom konsumenten krevde mer enn markedslønna, ville konsumenten redusert sitt arbeidstilbud. I optimum er konsumenten indifferent mellom å arbeide en ekstra time eller ikke.

d) Ved å kombinere den første og siste betingelsen får vi:

$$-w\frac{\partial u_1}{\partial C_1} + \beta w'(S_1)N_2\frac{\partial u_2}{\partial C_2} = 0$$
$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial C_1}}{\beta\frac{\partial u_2}{\partial C_2}} = \frac{W'(S_1)N_2}{w}$$

Tolkning: Ved å redusere konsumet i periode 1 med én enhet, kan en jobbe mindre siden vi da har at:

$$\Delta C_1 = -1 = w\Delta N_1$$
$$\Rightarrow -\Delta N_1 = \frac{1}{w} = \Delta S_1 > 0$$

Ergo kan vi ved å konsumere én enhet mindre i periode 1, øke studietiden. Per marginale enhet studietid i periode 1, og med gitt arbeidstid i periode 2, vil konsumenten få $W'(S_1)N_2$ ekstra inntekt i periode 2 (eller konsum i periode 2). Vi øker studietiden med $\frac{1}{w}$, slik at *samlet inntektsøkning* i periode 2 (som tilsvarer samlet konsumøkning i periode 2) blir nettopp $\frac{W'(S_1)N_2}{w}$.
Den korte forklaringen: Konsumenten er indifferent mellom å redusere konsumet med én enhet og studere $\frac{1}{w}$ ekstra timer dersom økningen i inntekt i periode 2 konsumenten krever som følge av å studere $\frac{1}{w}$ ekstra timer i periode 1 er akkurat lik det konsumenten får i markedet ved å øke studietiden marginalt.