UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Utsatt eksamen i: ECON2200 – Matematikk 1/ Mikro 1

Eksamensdag: 23.06.2014

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00

Oppgavesettet er på 4 sider

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

Oppgaver utsatt prøve i ECON 2200 – våren 2014

Oppgave 1 (12 poeng)

Deriver følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter

(a) $f(x) = 3x^2 - 3x^{-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(c) $f(x) = F(g(x), h(x))$

(d) $f(x) = e^{-2x}$

(e) $h(t,s) = (t-s)^2 + (t+s)^{-2}$

(f) Finn den femtederiverte av funksjonen i (d).

Oppgave 2 (15 poeng)

For hver av påstandene nedenfor, avgjør om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

(a) $\dfrac{x + \ln y - 3}{x-3} = 1 + \dfrac{\ln y}{x-3}$

(b) $e^{\ln 3 + 2\ln x} = 3x^2$

(c) Dersom $g(r) = \max_x(\ln x - rx)$, så er $g'(r) = \dfrac{1}{x^*(r)} - r$. Her er $x^*(r)$ den optimale verdien av x gitt r.

(d) Dersom funksjonen $f(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5xy - 10y$ har et stasjonærpunkt, må det være et er et minimumspunkt.

(e) Dersom $\ln(x+y) - \ln x = 5$ så følger det ved implisitt derivasjon at $y' = \dfrac{x+y}{x}$

Oppgave 3 (10 poeng)

a) Minimer $3x + y$ gitt bibetingelsen $\ln x + \ln y = \ln 24$, ved hjelp av Lagranges metode.

b) Illustrer løsningen i en figur og bruk figuren til å forklare hvorfor løsningen du har funnet må være et minimum.

Oppgave 4 Sant eller usant (12 poeng)

For hver av påstandene nedenfor, avgjør om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

a) Den kompenserte etterspørselen etter et gode kan falle når egenprisen faller. Vi kaller da godet et Giffen-gode.

b) Dersom en konsument bruker null enheter av gode 1, så må $\frac{u'_1}{u'_2} \leq \frac{p_1}{p_2}$.

Ulikheten kan være streng. Her er u'_1 marginalnytten av gode 1, og prisen på gode 1 er p_1 med tilsvarende notasjon for gode 2.

c) En bedrift vil alltid produsere et positivt kvantum av en vare om prisen er positiv, dersom bedriften bare har sunk kost og variable kostnader og der marginalkostnaden er null når kvantum er null.

d) Dersom en produktfunkjson har den egenskapen at når en dobler alle innsatsfaktorer vil produksjonen mer enn dobles, så sier vi at teknologien har avtagende skalautbytte.

Oppgave 5 (10 poeng)

Du skal anta at et arbeidsmarked kan beskrives som et perfekt konkurransemarked, med en etterspørsel etter en type arbeidskraft beskrevet ved etterspørselsfunksjonen $N^E = g(w;\alpha)$, der N^E angir etterspurt mengde (f.eks. i antall arbeidstimer), w lønn per enhet og α en skiftparameter. Det antas at $\frac{\partial g}{\partial w} < 0$ og $\frac{\partial g}{\partial \alpha} > 0$. Tilbudet av denne type arbeidskraft er gitt ved tilbudsfunksjonen $N^T = s(w;W)$, der N^T er tilbudt antall arbeidstimer, mens W angir lønna denne arbeidskraften kan oppnå i en annen type jobb. Det antas at $\frac{\partial s}{\partial w} > 0$, men at $\frac{\partial s}{\partial W} < 0$.

a) Illustrer i en figur hva lønna w må være for at det skal være likevekt i dette arbeidsmarkedet, for gitte verdier på α og W.

b) Hvordan påvirkes likevekten (lønn og antall arbeidstimer) av at α øker? Hva kan en slikt skift fange opp?

c) Anta at lønna W i det andre arbeidsmarkedet øker. Hva skjer med likevekten i «vårt» arbeidsmarked i dette tilfellet?

d) Under hvilke betingelser vil skiftene under b og c **ikke** lede til høyere lønn w? Forklar hva disse betingelsene uttrykker!

Oppgave 6 (16 poeng)

En konsument har preferanser over to varer gitt ved nyttefunksjonen $U(x,y) = x + a\ln y$ der x,y angir mengder av de to varene, og a er en positiv konstant.

a) Beregn den marginale substitusjonsbrøk og forklar hva denne uttrykker.

Anta at konsumenten har en gitt inntekt m som i sin helhet brukes til kjøp av de to varene til prisene hhv. p per enhet av $x-$varen og q per enhet av $y-$varen.

b) Formuler konsumentens nyttemaksimeringsproblem ved bruk av Lagranges metode og utled den nyttemaksimerende tilpasningen for gitte priser og gitt inntekt, når du antar at $m > pa$.

c) Fra foregående punkt kan du utlede etterspørselsfunksjonene for de to varene. Angi hvordan disse varierer med prisene og inntekt, vist ved hjelp av de partielle etterspørselsderiverte.

d) Hva blir de tilhørende etterspørselselastisitetene?

e) Utled utgiftsfunksjonen for et gitt nyttenivå; dvs. du skal finne den godekombinasjonen som minimerer samlet konsumutgift for å oppnå et gitt nyttenivå, $x + a\ln y = U^0$. Vis at utgiftsfunksjonen kan skrives som $B(p,q,U^0) = ap + pU^0 - ap\left[\ln a + \ln p - \ln q\right]$.

f) Beregn de deriverte av denne funksjonen med hensyn på de to prisene.

g) På grunnlag av resultatene fra punkt c og f skal du utlede Slutskylikningen på derivertform.

Oppgave 7 (15 poeng)

En bedrift har en kostnadsfunksjon ved produksjon av en vare i mengde x, gitt ved $C(x) = K + \frac{b}{2}x^2$ for $x > 0$, og med $C(0) = 0$.

a) Hva slags tolkning vil du gi K?

b) Utled samlet gjennomsnittskostnad og grensekostnad.

c) Hvilken produktmengde minimerer gjennomsnittskostnaden?

Anta at bedriften kan selge $x-$varen som prisfast kvantumstilpasser til prisen p.

d) Utled den profittmaksimerende produktmengden og angi under hvilke betingelser bedriften faktisk vil ønske å produsere.

e) Gitt at bedriften vil ønske å tilby et positivt kvantum. Hvordan påvirkes da tilbudt kvantum av
   - En økning i produktprisen p
   - En økning i K

La oss anta at bedriften ikke lenger er prisfast kvantumstilpasser, men monopolist av $x-$varen. Bedriften står nå overfor en etterspørselsfunksjon for denne varen gitt ved $P(x) = A - ax$, der A og a begge er positive konstanter. Bedriften kan selge varen til en og bare en pris i markedet (ingen prisdiskriminering).

f) Utled grenseinntekten for denne etterspørselsfunksjonen og forklar hvorfor grenseinntekten for et bestemt kvantum er lavere enn prisen.

g) Anta i første omgang at $K = 0$. Bestem det kvantum som maksimerer monopolistens profitt.
h) Hvordan påvirkes beslutningen i foregående punkt om $K > 0$?

Oppgave 8 (10 poeng)
En bedrift produserer en vare i mengde y med en produktfunksjon $G(N, E)$, der N er bruk av arbeidskraft og E er bruk av energi. Anta at G er tilstrekkelig deriverbar, med positiv grenseproduktivitet av hver produksjonsfaktor, samtidig som grenseproduktiviteten selv er avtakende i vedkommende faktor.

a) Utled den marginale tekniske substitusjonsbrøk og forklar hva den uttrykker.
b) Anta at faktorene er slik at $\dfrac{\partial^2 G(N,E)}{\partial N \partial E} < 0$; dvs., de er teknisk alternative.
   Forklar hva en slik egenskap betyr.

Om bedriften maksimerer overskuddet til gitt produktpris p og gitte priser på de to produksjonsfaktorene; w per enhet av N og q per enhet av E, vil et indre profittmaksimum oppfylle førsteordensbetingelsene $p\dfrac{\partial G}{\partial N} = w$ og $p\dfrac{\partial G}{\partial E} = q$.

c) Skisser disse betingelsene i hver sin figur og bruk dem (uten regning) til å vise hva virkningen på faktorbruk av en høyere w er når egenskapen fra b gjelder.