UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON3120/4120 – Matematikk 2: Matematisk analyse og lineær algebra**
Exam: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra

Eksamensdag: Tirsdag 20. desember 2016
Date of exam: Tuesday, December 20, 2016

Sensur kunngjøres: 9. januar 2017
Grades will be given: January 9, 2017

Tid for eksamen: kl. 09.00 – 12.00
Time for exam: 09.00 a.m. – 12.00 noon

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet) ***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:
- Alle skrevne og trykte hjelpemidler – samt kalkulator – er tillatt

Resources allowed:
- *All written or printed resources – as well as calculator - is allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

20. desember 2016, 0900–1200.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 Definer for alle reelle s og t matrisene $\mathbf{A}_{s,t}$ og $\mathbf{B}_s$ og vektoren $\mathbf{r}$ ved

$$\mathbf{A}_{s,t} = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 & 0 \\ t & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1-s & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 5 & 5s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a)
- Regn ut $t\mathbf{I} - s\mathbf{B}_s$, der $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen av orden 4×4.
- La $\mathbf{C}_{s,t} = \mathbf{A}_{s,t}\mathbf{B}_s$. Regn ut elementene c_{12} og c_{43} av $\mathbf{C}_{s,t}$. Det vil si, elementene på de plassene indikert som følger:

$$\mathbf{A}_{s,t}\mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} t+4 & c_{12} & 0 & -5(t-1) \\ -4(t-1) & t+4 & 0 & 5(t-1) \\ 5(t-1) & -5(t-1) & 5t & 5s(t-1) \\ 0 & 0 & c_{43} & 5t \end{pmatrix}$$

(De andre elementene er korrekte, og du skal ikke regne dem ut.)

Om du ikke klarte å regne ut c_{12} og c_{43} i del (a), så har du lov til å sette inn (de ukorrekte!) uttrykkene c_{21} for c_{12} og c_{34} for c_{43} og bruke dem fra nå av – og fortsatt få opp til full score på resten av oppgaven.

(b) Finnes det tall s og t slik at $s\mathbf{B}_s$ er den inverse av $\mathbf{A}_{s,t}$?

(c)
- Regn ut determinanten $|s\mathbf{B}_s|$.
- For hver verdi av s, avgjør om ligningssystemet $s\mathbf{B}_s\mathbf{x} = \mathbf{r}$ har ingen, én eller mer enn én løsning. (Her er $\mathbf{x}$ den ukjente.)

Oppgave 2 La $m > 0$ være en konstant, og la $\quad f(t) = t^{-1-m\ln t}\ln t \quad$ for $t > 0$. (Det at $t^{-m\ln t} = e^{-m(\ln t)^2}$ kan spare tid i et eller fler delspørsmål nedenfor.)

(a) Sett $p(s) = f(e^s) = se^{(-1-ms)s}$.

- Regn ut $\lim_{s\to+\infty} p(s)$ og forklar hvorfor den er lik $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
- Regn ut $\lim_{s\to-\infty} p(s)$.

(b) Det er et faktum at f har et globalt minimum $t_* > 1$. *Uten å* regne ut t_*, approksimer hvor mye minimums*verdien* $f(t_*)$ endrer seg om vi øker m med $1/1000$.

(c) Vis at $2m \lim_{a\to 0^+} \int_a^T f(t)\,dt = -2m\int_T^\infty f(t)\,dt = -T^{-m\ln T}$.

(d) Finn den allmenne løsningen av de følgende differensialligningene. (*Hint:* Bruk del (c).)

$$\dot{x} = f(t)\cdot e^x \qquad \text{og} \qquad \dot{y} = f(t)\cdot e^t + y$$

Oppgave 3 La $c > 0$ være en konstant. Definer $F(x,y) = \ln(cx+y)\cdot\ln x$ for de (x,y) slik at $x > 0$ og $cx + y > 0$. La (x^*, y^*) være punktet $(1, 1-c)$.

(a)
- Vis at F har et stasjonærpunkt i (x^*, y^*)
- Vis at F ikke har noe annet stasjonærpunkt enn (x^*, y^*).

(b) Kan andrederiverttesten klassifisere stasjonærpunktet (x^*, y^*) for F?

Se fra nå av på problemet

$$\max\ F(x,y) \qquad \text{når} \qquad \begin{cases} y & \le 0 \\ x & \le 1 \end{cases}$$

(c)
- Sier ekstremverdisetningen noe om dette problemet? Pass på å sjekke alle betingelsene (skjønt, den tillatte mengden er opplagt ikke-tom).
- Sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene som hører til problemet.

(d)
- For hvilke $c > 0$ – om noen – vil hjørnet $(x,y) = (1,0)$ tilfredstille Kuhn–Tucker-betingelsene?
- Kan Kuhn–Tucker-betingelsene være tilfredsstilt dersom $x < 1$?

University of Oslo / Department of Economics **English version**

ECON3120/4120 Mathematics 2

December 20th 2016, 0900–1200.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 Define for all real s and t the matrices $\mathbf{A}_{s,t}$ and $\mathbf{B}_s$ and the vector $\mathbf{r}$ by

$$\mathbf{A}_{s,t} = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 & 0 \\ t & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1-s & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 5 & 5s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a)
- Calculate $t\mathbf{I} - s\mathbf{B}_s$, where $\mathbf{I}$ is the identity matrix of order 4×4.
- Let $\mathbf{C}_{s,t} = \mathbf{A}_{s,t}\mathbf{B}_s$. Calculate the elements c_{12} and c_{43} of $\mathbf{C}_{s,t}$. That is, the elements on the positions as indicated:

$$\mathbf{A}_{s,t}\mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} t+4 & c_{12} & 0 & -5(t-1) \\ -4(t-1) & t+4 & 0 & 5(t-1) \\ 5(t-1) & -5(t-1) & 5t & 5s(t-1) \\ 0 & 0 & c_{43} & 5t \end{pmatrix}$$

(The other elements are correct and you are not asked to calculate them.)

If you were not able to calculate c_{12} and c_{43} in part (a), you are allowed to insert the (incorrect!) expressions c_{21} for c_{12} and c_{34} for c_{43} and use those from now on – and still get up to full score for the rest of the problem.

(b) Do there exist numbers s and t such that $s\mathbf{B}_s$ is the inverse of $\mathbf{A}_{s,t}$?

(c)
- Calculate the determinant $|s\mathbf{B}_s|$.
- For each value of s, determine whether the equation system $s\mathbf{B}_s\mathbf{x} = \mathbf{r}$ has zero, one or more than one solution. (Here, $\mathbf{x}$ is the unknown.)

Problem 2 Let $m > 0$ be a constant, and let $\quad f(t) = t^{-1-m\ln t}\ln t \quad$ for $t > 0$. (The fact that $t^{-m\ln t} = e^{-m(\ln t)^2}$ may save time in one or more parts below.)

(a) Put $p(s) = f(e^s) = se^{(-1-ms)s}$.

- Calculate $\lim_{s\to+\infty} p(s)$ and explain why it equals $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
- Calculate $\lim_{s\to-\infty} p(s)$.

(b) It is a fact that f has a global minimum $t_* > 1$. *Without* calculating t_*, approximate how much the minimum *value* $f(t_*)$ changes if we increase m by $1/1000$.

(c) Show that $2m \lim_{a\to 0^+} \int_a^T f(t)\,dt = -2m \int_T^\infty f(t)\,dt = -T^{-m\ln T}$.

(d) Find the general solution of the following differential equations. (*Hint:* Use part (c).)

$$\dot{x} = f(t)\cdot e^x \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = f(t)\cdot e^t + y$$

Problem 3 Let $c > 0$ be a constant. Define $F(x, y) = \ln(cx + y) \cdot \ln x$ for those (x, y) such that $x > 0$ and $cx + y > 0$. Let (x^*, y^*) be the point $(1, 1 - c)$.

(a)
- Show that F has a stationary point at (x^*, y^*)
- Show that F has no other stationary points than (x^*, y^*).

(b) Can the second-derivative test classify the stationary point (x^*, y^*) for F?

Consider from now on the problem

$$\max\ F(x, y) \qquad \text{subject to} \qquad \begin{cases} y & \le 0 \\ x & \le 1 \end{cases}$$

(c)
- Does the extreme value theorem tell anything about this problem? Make sure to check all the conditions (though, the admissible set is obviously nonempty).
- State the Kuhn–Tucker conditions associated with the problem.

(d)
- For what $c > 0$ – if any – will the corner $(x, y) = (1, 0)$ satisfy the Kuhn–Tucker conditions?
- Can the Kuhn–Tucker conditions be satisfied if $x < 1$?