

# **UNIVERSITETET I OSLO**

## **ØKONOMISK INSTITUTT**

Exam: **ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra**

*Eksamen i: ECON3120/4120 – Matematikk 2: Matematisk analyse og lineær algebra*

Date of exam: Friday, May 29, 2015

*Eksamensdag: Fredag 29. mai 2015*

**Grades will be given: June 10, 2015**

*Sensur kunngjøres: 10. juni 2015*

Time for exam: 9.00 a.m. – 12.00 noon

*Tid for eksamen: kl. 09.00 – 12.00*

*The problem set covers 4 pages of text (not incl. the cover sheet)*

Oppgavesettet er på 4 sider tekst (ikke inkl. forsiden)      *Norsk versjon på side 3*

Resources allowed:

- All written and printed resources, as well as calculator, is allowed

Tillatte hjelpemidler:

- Alle trykte og skrevne hjelpemidler, samt lommekalkulator, er tillatt

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

*Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.*

**ECON3120/4120 Mathematics 2**

May 29th 2015, 0900–1200.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier part or item (e.g. “(a)” or “i)”) to solve a later one (e.g. “(c)” or “ii)”), regardless of whether you managed to answer the former. A later part or item does not necessarily utilize answers from or information given in a previous one.

**Problem 1** Define for each real number  $w$  the matrix  $\mathbf{A}_w$  and the vector  $\mathbf{b}$  by

$$\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} 1000 + w & 1001 & 1002 \\ 1000 & 1000 + w & 1000 \\ 1000 & 999 & 998 + w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) i) Calculate  $\mathbf{A}_2\mathbf{b}$ .  
 ii) Why does it follow from i) that the determinant  $|\mathbf{A}_2|$  equals 0?
- (b) Observe that the sum of the three rows is  $(3000 + w)$  times the vector  $(1, 1, 1)$ . Use this to show that i)  $|\mathbf{A}_{-3000}| = 0$ , and ii)  $|\mathbf{A}_0| = 0$ .
- (c) For each of the following equation systems, decide the number of solutions (zero, one or more than one): i)  $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ; ii)  $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ; iii)  $\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .  
 (*Hint:* It may help to add two of the equations to the third.)

**Problem 2** The following equation system defines continuously differentiable functions  $u = u(p, q)$ ,  $v = v(p, q)$  around the point where  $p = q = 1$ ,  $u = v = 0$ :

$$\begin{aligned} e^u + \ln(1 + pqv) + uv - q &= 0 \\ e^u - e^{uv} - p &= -1 \end{aligned} \tag{E}$$

- (a) Differentiate the system (i.e. calculate differentials).
- (b) Find a general expression for  $v'_p(p, q)$ .

### Problem 3

- (a) Find the limits (or show non-existence), for arbitrary constants  $p > q \geq 0$ . (*Hint for*  $p \in (0, 1)$ : Write  $\frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} \cdot \frac{1}{t-1}$ .)

$$\text{i) } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(\ln t)^{q+1}}{t-1}, \quad \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^p}, \quad \text{iii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^p)^{q+1}}{(t-1)^p}$$

For each  $x_1 > 0$ , let  $x(t)$  be that particular solution of the differential equation

$$\dot{x} = \frac{x^3 - 8}{x^2} \cdot t^8 \ln t \quad (\text{D})$$

which is such that  $x(1) = x_1$ . (The equation is valid only for  $t > 0$ ,  $x > 0$ .)

- (b) Explain why  $\ddot{x}(1) = (x_1 - \frac{8}{x_1^2}) \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1}$ , and use this and part (a) to find the quadratic approximation of  $x$  around  $t = 1$ .

For full score, you are required to show it using only these pieces of information. If you use other means, e.g. part (c) below, you can still get up to a “C” worth of score.

- (c) Solve (D) for each value of  $x_1 > 0$ .

**Problem 4** Let  $p \neq q$  be positive integers with  $q$  odd (i.e. 1, 3, 5, ...). Let  $g(x, y, z) = x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} - 1$ , and consider the max/min problems

$$\max / \min \frac{x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1}}{p+1} \quad \text{subject to } g(x, y, z) = 0 \quad \text{and} \quad x + y - z = 1 \quad (\text{P})$$

- (a) i) At least one of the max/min problems will have a solution. Which one(s)?  
(*Hint: It is crucial that  $q$  is odd so that i.e.  $g(-x, y, z) = g(x, y, z)$ .)*)  
ii) State the associated Lagrange conditions.

In the rest of this problem, we shall consider possible solutions of the form  $(x, y, z) = (x, x, 2x - 1)$ . Set  $y = x$ , and  $z = x + y - 1 = 2x - 1$ , so that the first constraint reads  $h(x) = 0$ , where  $h(x) = g(x, x, 2x - 1) = 2x^{q+1} + (2x - 1)^{q+1} - 1$ . (You shall not show this.)

- (b) i) Show that the function  $h(x)$  has a zero  $x^* > 1/2$ .  
ii) Show that the point  $(x, y, z) = (x^*, x^*, 2x^* - 1)$  satisfies the Lagrange conditions, where  $x^* > 1/2$  is the zero from item i).  
• If unable to do so, score up to a “C” on this item ii) may be awarded if you instead show that the Lagrange conditions are satisfied at  $(0, 0, -1)$ .

**ECON3120/4120 Matematikk 2**

29. mai 2015, 0900–1200.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i en tidligere del eller et tidligere punkt (f.eks. “(a)” eller “i”) til å løse et senere (f.eks. “(c)” eller “ii”), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. En senere del/punkt trenger ikke bruke svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

**Oppgave 1** Definer for hvert reelt tall  $w$  matrisen  $\mathbf{A}_w$  og vektoren  $\mathbf{b}$  ved

$$\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} 1000 + w & 1001 & 1002 \\ 1000 & 1000 + w & 1000 \\ 1000 & 999 & 998 + w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) i) Regn ut  $\mathbf{A}_2\mathbf{b}$ .  
 ii) Hvorfor følger det fra i) at determinanten  $|\mathbf{A}_2|$  er lik 0?
- (b) Merk at summen av de tre radene er  $(3000 + w)$  ganger vektoren  $(1, 1, 1)$ . Bruk dette til å vise at i)  $|\mathbf{A}_{-3000}| = 0$ , og ii)  $|\mathbf{A}_0| = 0$ .
- (c) Finn antall løsninger for hvert av de følgende likningssystemene (ingen, én eller flere):  
 i)  $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;    ii)  $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ;    iii)  $\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .  
 (*Hint:* Det kan være til hjelp å addere to av ligningene til den tredje.)

**Oppgave 2** Det følgende likningssystemet definerer kontinuerlig deriverbare funksjoner  $u = u(p, q)$ ,  $v = v(p, q)$  omkring punktet der  $p = q = 1$ ,  $u = v = 0$ :

$$\begin{aligned} e^u + \ln(1 + pqv) + uv - q &= 0 \\ e^u - e^{uv} - p &= -1 \end{aligned} \tag{E}$$

- (a) Differensier systemet (dvs. regn ut differensialer).
- (b) Finn et generelt uttrykk for  $v'_p(p, q)$ .

### Oppgave 3

- (a) Finn grensene (eller vis at de ikke eksisterer), for vilkårlige konstanter  $p > q \geq 0$ .  
(Hint for  $p \in (0, 1)$ : Skriv  $\frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} \cdot \frac{1}{t-1}$ .)

$$\text{i) } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(\ln t)^{q+1}}{t-1}, \quad \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^p}, \quad \text{iii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^p)^{q+1}}{(t-1)^p}$$

For hver  $x_1 > 0$ , la  $x(t)$  være den løsningen av differensialligningen

$$\dot{x} = \frac{x^3 - 8}{x^2} \cdot t^8 \ln t \quad (\text{D})$$

som er slik at  $x(1) = x_1$ . (Ligningen er gyldig bare når  $t > 0$ ,  $x > 0$ .)

- (b) Forklar hvorfor  $\ddot{x}(1) = (x_1 - \frac{8}{x_1^2}) \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1}$ , og bruk dette og del (a) til å finne den kvadratiske approksimasjonen til  $x$  omkring  $t = 1$ .

For full score må du vise dette vha. kun denne informasjonen. Om du bruker andre metoder, f.eks. del (c) nedenfor, kan du likevel få opp til score tilsvarende en «C».

- (c) Løs (D) for alle verdier av  $x_1 > 0$ .

**Oppgave 4** La  $p \neq q$  være positive heltall med  $q$  odde (dvs. 1, 3, 5, ...). La  $g(x, y, z) = x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} - 1$ , og se på maks-/min-problemet

$$\text{maks/min } \frac{x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1}}{p+1} \quad \text{når } g(x, y, z) = 0 \quad \text{og } x + y - z = 1 \quad (\text{P})$$

- (a) i) Minst ett av maks-/min-problemene har en løsning. Hvilke(t)?  
(Hint: Det er kritisk at  $q$  er odde slik at f.eks.  $g(-x, y, z) = g(x, y, z)$ .)  
ii) Sett opp de tilhørende Lagrange-betingelsene.

I resten av oppgaven skal vi se på eventuelle løsninger på formen  $(x, y, z) = (x, x, 2x - 1)$ . Sett  $y = x$ , og  $z = x + y - 1 = 2x - 1$ , slik at den første bibetingelsen tar formen  $h(x) = 0$ , der  $h(x) = g(x, x, 2x - 1) = 2x^{q+1} + (2x - 1)^{q+1} - 1$ . (Du skal ikke vise dette.)

- (b) i) Vis at funksjonen  $h(x)$  har et nullpunkt  $x^* > 1/2$ .  
ii) Vis at punktet  $(x, y, z) = (x^*, x^*, 2x^* - 1)$  tilfredsstiller Lagrange-betingelsene, der  $x^* > 1/2$  er nullpunktet fra punkt i).  
• Om du ikke klarer dette, kan du score opp til en «C» på dette punkt ii) ved å i stedet vise at Lagrange-betingelsene er tilfredsstilt i  $(0, 0, -1)$ .