UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON3120/4120 – Matematikk 2: Matematisk analyse og lineær algebra**
Exam: ***ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra***

Eksamensdag: Tirsdag 7. juni 2016
Date of exam: Tuesday, June 7, 2016

Sensur kunngjøres: 24. juni 2016
Grades will be given: June 24, 2016

Tid for eksamen: kl. 14.30 – 17.30
Time for exam: 02.30 p.m. – 05.30 p.m.

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet) ***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:
- Alle skrevne og trykte hjelpemidler – samt kalkulator – er tillatt

Resources allowed:
- *All written or printed resources – as well as calculator - is allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

7. juni 2016, 1430–1730.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 La $f(x,y) = 25c^2x - \frac{1}{3}x^3 + 9c \cdot (\frac{1}{2}y^3 - xy^2)$, der $c > 0$ er en konstant.

(a)
- Vis at $(x,y) = (5c, 0)$ er et lokalt maksimumspunkt.
- Finn de andre stasjonærpunktene til f.
- Klassifiser disse punktene.

(b)
- Vis at f ikke har noe *globalt* maksimum eller minimum (over $\mathbf{R}^2$),
- Vis at det derimot finnes en løsning på problemet

$$\max\ f(x,y) \qquad \text{når} \quad (x-4)^2 + 4y^2 \leq 4 \quad \text{og} \quad x \leq 5 \tag{P}$$

(c) I denne delen lar du $c = 1$.
- Sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene som hører til problemet (P).
- Finn de(n) eneste mulige verdien(e) på multiplikatoren som hører til bibetingelsen $x \leq 5$.
(*Hint:* Bevis ved kontradiksjon (motsigelse) kan være nyttig, men det finnes andre metodar.)

Oppgave 2 Definer for vilkårlige reelle konstanter a, b, c, d, p, q, r, s, matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{AP}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & p & q & 0 \\ 0 & r & s & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

(*Notasjon:* $\mathbf{F}'$ for transponert, $|\mathbf{F}|$ for determinant, $\mathbf{F}^{2016}$ for 2016. potens.)

(a)
- Regn ut $\mathbf{E}$.
- Regn ut $\mathbf{F}'\mathbf{F}$.

(b)
- Vis at $|\mathbf{E}| = |\mathbf{F}|$.
- Er $|-\mathbf{E}^{2016}| = |\mathbf{F}^{2016}|$ eller er $|-\mathbf{E}^{2016}| = -|\mathbf{F}^{2016}|$ eller ingen av delene?

(c) I denne delen lar du $a = d = 3$, $b = 4$, $c = -4$ and $p = s = 5$.
- Finn q og r og et tall h slik at $h\mathbf{F}'$ den inverse av $\mathbf{F}$.
- Har $\mathbf{F}$ en invers for *alle* q og r?

Oppgave 3

(a)
- Hvorfor er $\lim_{x\to+\infty} \left(x^{-1} \ln(1 + x^p e^x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{px^{p-1} + x^p}{e^{-x} + x^p}$ både for $p \geq 0$ og for $p < 0$?
- La $p > 0$. Finn $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{px^{p-1} + x^p}{e^{-x} + x^p}$ *uten* å bruke l'Hôpitals regel.

(b) Finn reelle tal α og β slik at $\int t^2(1 + 3\ln t)^2 \, dt = C + \Big(3\alpha(\ln t)^2 + \beta\Big) \cdot t^3$.

(c) Finn den partikulære løsningen som tilfredsstiller $x(1) = 2$, av differensialligningen

$$\dot{x} = \left(\frac{t \cdot (1 + 3\ln t)}{x}\right)^2$$

Om du ikke løste del (b), skriver du bare "α" og "β" for disse tallene.

Oppgave 4 Ligningssystemet

$$v + e^{-v} - x \cdot (1 - y) - (e^v + e^{-v})u = 0$$
$$1 - e^{-v} - (e^v - e^{-v})u = 0$$

definerer $u = u(x, y)$ og $v = v(x, y)$ som kontinuerlig deriverbare funksjoner av (x, y) rundt det punktet der $(x, y, u, v) = (\ln 2,\ \frac{1}{3\ln 2},\ \frac{1}{3},\ \ln 2)$.

(a) Differensier systemet (dvs., regn ut differensialer).

(b) Regn ut $v'_x(\ln 2,\ \frac{1}{3\ln 2})$.

University of Oslo / Department of Economics **English version**

ECON3120/4120 Mathematics 2

June 7th 2016, 1430–1730.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 Let $f(x,y) = 25c^2x - \frac{1}{3}x^3 + 9c \cdot (\frac{1}{2}y^3 - xy^2)$, where $c > 0$ is a constant.

(a)
- Show that $(x,y) = (5c, 0)$ is a local maximum point.
- Find the other stationary points of f.
- Classify these stationary points.

(b)
- Show that f has no *global* maximum nor minimum (over $\mathbf{R}^2$),
- Show that there is indeed a solution to the problem

$$\max \ f(x,y) \qquad \text{subject to} \quad (x-4)^2 + 4y^2 \leq 4 \quad \text{and} \quad x \leq 5 \tag{P}$$

(c) Let in this part $c = 1$.
- State the Kuhn–Tucker conditions associated with problem (P).
- Find the only possible value(s) of the multiplier associated with the constraint $x \leq 5$.
  (*Hint:* It could be useful to use proof by contradiction, although there are other ways.)

Problem 2 For arbitrary real constants a, b, c, d, p, q, r, s, define the matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{AP}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & p & q & 0 \\ 0 & r & s & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

(*Notation:* $\mathbf{F}'$ for transpose, $|\mathbf{F}|$ for the determinant, $\mathbf{F}^{2016}$ for the 2016th power.)

(a)
- Calculate $\mathbf{E}$.
- Calculate $\mathbf{F}'\mathbf{F}$.

(b)
- Show that $|\mathbf{E}| = |\mathbf{F}|$.
- Is $|-\mathbf{E}^{2016}| = |\mathbf{F}^{2016}|$ or is $|-\mathbf{E}^{2016}| = -|\mathbf{F}^{2016}|$ or neither?

(c) In this part, let $a = d = 3$, $b = 4$, $c = -4$ and $p = s = 5$.
- Find q and r and some number h such that $h\mathbf{F}'$ is the inverse of $\mathbf{F}$.
- Does $\mathbf{F}$ have an inverse for *every* choice of q and r?

Problem 3

(a)
- Why is $\lim_{x\to+\infty} \left(x^{-1}\ln(1 + x^p e^x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{px^{p-1} + x^p}{e^{-x} + x^p}$ true in both cases $p \geq 0$ and $p < 0$?
- Let $p > 0$. Find $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{px^{p-1} + x^p}{e^{-x} + x^p}$ *without* using l'Hôpital's rule.

(b) Find real numbers α and β such that $\int t^2(1 + 3\ln t)^2\, dt = C + \Big(3\alpha(\ln t)^2 + \beta\Big) \cdot t^3$.

(c) Find the particular solution which satisfies $x(1) = 2$, of the differential equation

$$\dot{x} = \left(\frac{t \cdot (1 + 3\ln t)}{x}\right)^2$$

If you did not solve part (b), just write "α" and "β" for those numbers.

Problem 4 The equation system

$$v + e^{-v} - x \cdot (1 - y) - (e^v + e^{-v})u = 0$$
$$1 - e^{-v} - (e^v - e^{-v})u = 0$$

defines $u = u(x, y)$ and $v = v(x, y)$ as continuously differentiable functions of (x, y) around the point where $(x, y, u, v) = (\ln 2,\ \frac{1}{3\ln 2},\ \frac{1}{3},\ \ln 2)$.

(a) Differentiate the system (i.e., calculate differentials).

(b) Calculate $v'_x(\ln 2,\ \frac{1}{3\ln 2})$.