UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and linear algebra**
Exam: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and linear algebra

Eksamensdag: Tirsdag 30. mai 2017 **Sensur kunngjøres: 20. juni 2017**
Date of exam: Tuesday, May 30, 2017 ***Grades will be given: June 20, 2017***

Tid for eksamen: kl. 09.00 – 12.00
Time for exam: 09.00 a.m. – 12.00 noon

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet) ***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:
- Åpen bok eksamen, der alle skrevne og trykte hjelpemidler – samt kalkulator – er tillatt

Resources allowed:
- *Open book exam, where all written and printed resources – as well as calculator - is allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

30. mai 2017, 0900–1200.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 Ta for gitt at følgende ligningssystem definerer kontinuerlig deriverbare funksjoner $u = u(x, y)$ og $v(x, y)$ rundt punktet der $u = 0$, $v = 1$, $x = 2$ og $y = 3$.

$$\begin{aligned} xy + uv^2 &= 6 \\ ue^{x+y} + yv^2 &= 3 \end{aligned}$$

(a) Differensier systemet (dvs., regn ut differensialer).

(b) Approksimer $v(2.02,\ 2.99)$ fra det differensierte systemet. *Merk:* det er obligatorisk å bruke det differensierte systemet. Det gis ikke uttelling for andre metoder.

Oppgave 2

(a) La $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ Regn ut grensene, eller vis at de ikke eksisterer:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}} \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x^{-n} e^{x/n}}$$

(b)
- Finn konstanter p og q slik at $p \int t^{e-1} \ln(e^2 t^{e-1})\, dt = t^e \big(q + \ln t\big) + C$.
- Regn ut integralet $\int_1^x e^{\sqrt{z}} dz.$ (*Hint:* substituer først.)

(c) Finn den allmenne løsningen av differensialligningen

$$\dot{x}(t) = t^{e-1} \ln(e^2 t^{e-1}) \cdot x^2$$

(Du har lov å bruke bokstavene p og q.)

Oppgave 3 Definer for alle reelle t matrisen $\mathbf{A}_t$ og og vektoren $\mathbf{r}$ ved

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 1 & t & -t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a)
- Vis at $\mathbf{A}_t\mathbf{r} - \mathbf{r} = \mathbf{0}$ for alle t, og regn ut $\mathbf{A}_t\mathbf{A}_t'$ (der primtegnet står for transponering).
- Vis at determinanten $|\mathbf{A}_t|$ er lik $q \cdot (t-2)$ for some $q \neq 0$.
- Regn ut determinanten $|(e^t\mathbf{A}_t)^{2017}\mathbf{A}_t'|$.

(b) For hver t, se på ligningssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{r}$ (i de(n) ukjente $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)'$).
- Hvorfor vet vi fra del (a) at det alltid finnes en løsning?
- Når er det bare én løsning?
- Om det er flere løsninger: hvor mange frihetsgrader?

Oppgave 4 *Ved sensuren forventer man at del (b) får lavere vekt enn (a) og (c).*
Definer for hvert tall Q funksjonen $f = f(x,y)$ som

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}y^3 + (y-38)Qx - 32Q\ln y + \frac{4117}{6}$$

(a) I denne delen skal du la $Q = 1$.
- Vis at $(x_1, y_1) = (37, 1)$ er lokalt minimum for f.
- Finn et annet stasjonærpunkt (x_2, y_2) with $x_2 < x_1$. (*Hint:* Du kan forsøke *et naturlig tall nær null* for y_2 om du ikke vil gjøre polynomdivisjon.)
- Finn ut hva andrederiverttesten sier om (x_2, y_2).

(b) I denne delen vil Q variere. Ta for gitt at om $Q \approx 1$, så har f et lokalt minimum (x^*, y^*) nær $(x_1, y_1) = (37, 1)$. Dessuten er verdien $V = f(x^*, y^*)$ en funksjon $V(Q)$, med $V(1) = 0$.
- Hvorfor er $V(Q) \approx 37^2 \cdot (1-Q)$ for $Q \approx 1$?

(c) La igjen $Q = 1$. Se på (men ikke forsøk å løse) problemet

$$\max\ f(x,y) \qquad \text{når} \qquad 10^{20-x} - y \leq 0 \qquad \text{og} \qquad x \geq 30 \tag{P}$$

- Still opp Kuhn–Tucker-betingelsene. Om du ikke klarer å derivere 10^{20-x}: kun mindre trekk for å skrive dens deriverte som « $w(x)$ » for nær full score.
- Hvorfor vet vi at det finnes et punkt som tilfredsstiller Kuhn–Tucker-vilkåra?
- Sier ekstremverdisetningen noe om dette problemet? Pass på å sjekke alle betingelsene (skjønt, den tillatte mengden er opplagt ikke-tom).

University of Oslo / Department of Economics **English version**

ECON3120/4120 Mathematics 2

May 30th 2017, 0900–1200.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 Take for granted that the following equation system defines continuously differentiable functions $u = u(x, y)$ and $v(x, y)$ around the point where $u = 0$, $v = 1$, $x = 2$ and $y = 3$.

$$\begin{aligned} xy + uv^2 &= 6 \\ ue^{x+y} + yv^2 &= 3 \end{aligned}$$

(a) Differentiate the system (i.e., calculate differentials).

(b) Approximate $v(2.02,\ 2.99)$ from the differentiated system. *Note:* it is mandatory to use the differentiated system. There is no score for using other methods.

Problem 2

(a) Let $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ be a constant. Calculate the limits or show they do not exist:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}} \qquad \text{and} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x^{-n} e^{x/n}}$$

(b)
- Find constants p and q such that $p \int t^{e-1} \ln(e^2 t^{e-1})\, dt = t^e \big(q + \ln t\big) + C.$
- Calculate the integral $\displaystyle\int_1^x e^{\sqrt{z}} dz.$ (*Hint:* substitute first.)

(c) Find the general solution of the differential equation

$$\dot{x}(t) = t^{e-1} \ln(e^2 t^{e-1}) \cdot x^2$$

(You are allowed to use the letters p and q.)

Problem 3 Define for all real t the matrix $\mathbf{A}_t$ and and the vector $\mathbf{r}$ by

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 1 & t & -t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a)
- Show that $\mathbf{A}_t\mathbf{r} - \mathbf{r} = \mathbf{0}$ for all t, and calculate $\mathbf{A}_t\mathbf{A}_t'$ (where the prime denotes transpose).
- Show that the determinant $|\mathbf{A}_t|$ equals $q \cdot (t-2)$ for some $q \neq 0$.
- Calculate the determinant $|(e^t\mathbf{A}_t)^{2017}\mathbf{A}_t'|$.

(b) Consider for each t the equation system $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{r}$ (in the unknown $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)'$).
- Why do we know from part (a) that there always is a solution?
- When is there only one solution?
- If there are several solutions: how many degrees of freedom?

Problem 4 *Upon grading, part (b) is expected to carry less weight than (a) and (c).* Define for each number Q the function $f = f(x, y)$ as

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}y^3 + (y - 38)Qx - 32Q \ln y + \frac{4117}{6}$$

(a) In this part, let $Q = 1$.
- Show that $(x_1, y_1) = (37, 1)$ is a local minimum for f.
- Find a second stationary point (x_2, y_2) with $x_2 < x_1$. (*Hint:* You can try *a natural number close to zero* for y_2 if you do not want to do polynomial division.)
- Find out what the second-derivative test says about (x_2, y_2).

(b) In this part, Q varies. You can take for granted that if $Q \approx 1$, then f has a local minimum (x^*, y^*) near $(x_1, y_1) = (37, 1)$. Furthermore, the value $V = f(x^*, y^*)$ is a function $V(Q)$, with $V(1) = 0$.
- Why is $V(Q) \approx 37^2 \cdot (1 - Q)$ for $Q \approx 1$?

(c) Let again $Q = 1$. Consider (but do not try to solve!) the problem

$$\max\ f(x, y) \qquad \text{subject to} \qquad 10^{20-x} - y \leq 0 \qquad \text{and} \qquad x \geq 30 \qquad \text{(P)}$$

- State the associated Kuhn–Tucker conditions. If you are unable to differentiate 10^{20-x}: only minor penalty for writing its derivative as just « $w(x)$ ».
- Why do we know that there is a point satisfying the Kuhn–Tucker conditions?
- Does the extreme value theorem tell anything about this problem? Make sure to check all the conditions (though, the admissible set is obviously nonempty).