

UNIVERSITETET I OSLO

ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and linear algebra**

Exam: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and linear algebra

Eksamensdag: Fredag 8. juni 2018
Date of exam: Friday, June 8, 2018

Sensur kunngjøres: 22. juni 2018
Grades are given: June 22, 2018

Tid for eksamen: kl. 14.30 – 17.30
Time for exam: 02:30 p.m. – 05:30 p.m.

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (Incl. cover sheet)

English version on page 4

Tillatte hjelpemidler:

- Åpen bok eksamen, der alle trykte og skrevne hjelpemidler, i tillegg til to alternative kalkulatorer, er tillatt. Se nedenfor.
- *Open book examination, where all written and printed resources, in addition to two alternative calculators, are allowed. Calculators allowed for examination:*
 - **Aurora HC106**
 - **Casio FX-85EX**

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

ECON3120/4120 Matematikk 2

8. juni 2018, 1430–1730.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt begge de godkjente kalkulatorene er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. “(a)”) til å løse et senere (f.eks. “(c)”), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 Ligningssystemet

$$\begin{aligned} xe^{x-sy} + ty + e^{-xy} &= 5 \\ se^{-x} + txy + e^{st} &= 1 \end{aligned}$$

definerer kontinuerlig deriverbare funksjoner $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$ rundt det punktet der $(s, t, x, y) = (0, 2, 0, 2)$. (Dette skal du ikke vise.)

(a) Differensier systemet (dvs., regn ut differensialer).

(b) Regn ut $\frac{\partial y}{\partial s}(0, 2)$.**Oppgave 2** Definer for hvert reelle tall t matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Regn ut $\mathbf{B}_t \mathbf{B}_t'$ og $\mathbf{B}_t(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$, der s er en reell konstant, \mathbf{I} er 3×3 -identitetsmatrisen, og primtegnen står for transponering.

- (b)
- Bruk det følgende (det er *ingen* score for andre metoder!) til å regne ut \mathbf{A}^{-1} eller vise at den ikke eksisterer: løs $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ ved gausseliminasjon.
 - Finn \mathbf{B}_t^{-1} eller vis at den ikke eksisterer, *uten* å bruke metoden fra forrige kulepunkt. (Du kan for eksempel regne ut kofaktorer.)

Oppgave 3

- (a)
- Regn ut $\int q e^{9q} dq$
 - Regn ut $\int_r^\infty s^{-9} \ln s ds$ (der $r > 0$).
- (b) Finn den allmenne løsningen av differensialligningen $\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{t} = \frac{3}{t}$.

Oppgave 4 Definer for $x > 0$ og alle reelle y funksjonene f og h ved

$$f(x, y) = (y - e^{y-x}) \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \text{og} \quad h(x) = f'_x(x, x) = \frac{2(x-1)}{1+x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

- (a)
- Vis at $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -1$.
 - Finn $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- (b)
- Vis at $h(w) = 0$ for minst én $w \in (0, 1)$. (Du er ikke spurt om å regne ut w .)
 - La $w \in (0, 1)$ være slik at $h(w) = 0$ som i forrige kulepunkt. Ta for gitt at $f''_{xx}(w, w) > 0$.
Vis at $(x, y) = (w, w)$ er et sadelpunkt for f .
- (c) Se på maksimeringsproblemet

$$\max f(x, y) \quad \text{når} \quad y \geq x, \quad x \geq 1 \quad (\text{P})$$

- Sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene som hører til problemet (P).
- Vis at om Kuhn–Tucker-betingelsene er tilfredsstilt i (x, y) , så er $x = y$.

La nå $a > 0$ være en konstant, og se på funksjonen $g(x) = (a - e^{a-x}) \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ for $x > 0$. (Dvs., $g(x) = f(x, a)$, der $a > 0$ tas som konstant.) Ta for gitt at g har et globalt minimumspunkt x_* .

- (d) Minimumsverdien $V = g(x_*)$ avhenger av a . Finn et uttrykk for $V'(a)$.

ECON3120/4120 Mathematics 2

June 8th 2018, 1430–1730.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as both the approved calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. “(a)”) to solve a later one (e.g. “(c)”), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 The equation system

$$\begin{aligned}xe^{x-sy} + ty + e^{-xy} &= 5 \\se^x + txy + e^{st} &= 1\end{aligned}$$

defines continuously differentiable functions $x = x(s, t)$ and $y = y(s, t)$ around the point where $(s, t, x, y) = (0, 2, 0, 2)$. (You shall not show this.)

(a) Differentiate the system (i.e., calculate differentials).

(b) Calculate $\frac{\partial y}{\partial s}(0, 2)$.**Problem 2** Define for each real t the matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Calculate $\mathbf{B}_t \mathbf{B}_t'$ and $\mathbf{B}_t(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$, where s is a real constant, \mathbf{I} is the 3×3 identity matrix, and the prime sign denotes matrix transpose.

(b)

- Use the following (no score for other methods!) to calculate \mathbf{A}^{-1} or show that it does not exist: solve $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ by Gaussian elimination.
- Find \mathbf{B}_t^{-1} or show that it does not exist, *without* using the method of the previous bullet item. (E.g., you can calculate cofactors.)

Problem 3

- (a) • Calculate $\int q e^{9q} dq$
- Calculate $\int_r^\infty s^{-9} \ln s ds$ (where $r > 0$).
- (b) Find the general solution of the differential equation $\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{t} = \frac{3}{t}$.

Problem 4 Define for $x > 0$ and all real y the functions f and h by

$$f(x, y) = (y - e^{y-x}) \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \text{and} \quad h(x) = f'_x(x, x) = \frac{2(x-1)}{1+x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

- (a) • Show that $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -1$.
- Find $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- (b) • Show that $h(w) = 0$ for at least one $w \in (0, 1)$. (You are not asked to compute w .)
- Let $w \in (0, 1)$ be such that $h(w) = 0$ as in the previous bullet item. Take for granted that $f''_{xx}(w, w) > 0$. Show that $(x, y) = (w, w)$ is a saddle point for f .
- (c) Consider the optimization problem

$$\max f(x, y) \quad \text{subject to} \quad y \geq x, \quad x \geq 1 \quad (\text{P})$$

- State the Kuhn–Tucker conditions associated with the problem (P).
- Show that if the Kuhn–Tucker conditions hold at (x, y) , then $x = y$.

Let now $a > 0$ be a constant and consider the function $g(x) = (a - e^{a-x}) \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ for $x > 0$. (That is, $g(x) = f(x, a)$, with $a > 0$ taken as constant.) Take for granted that g has a global minimum point x_* .

- (d) The minimum value $V = g(x_*)$ depends on a . Find an expression for $V'(a)$.