UNIVERSITETET I OSLO

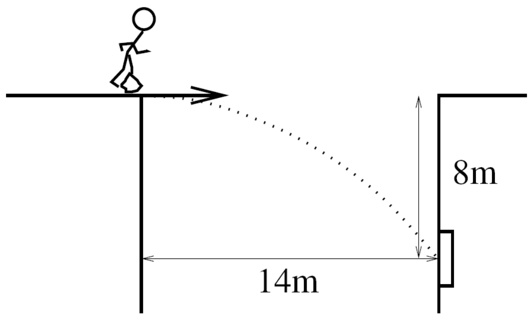
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2023
Dato: Fredag 1. desember 2023, kl. 15:00-19:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 6 sider (formelark bakerst på side 7).
Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: "Matematisk formelsamling".
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.
Husk at alle svar må begrunnes!
Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 Pakkelevering

En hemmelig agent har fått i oppdrag å levere en pakke til en kollega. Agenten må sparke pakken horisontalt fra taket på en høy bygning med akkurat riktig fart, slik at pakken seiler inn gjennom et vindu i nabobygget (se figur). Midtpunktet til vinduet er 8.0 meter under taket der agenten sparker pakken fra, og vinduet er i en horisontal avstand på 14 meter. Vi ser foreløpig bort fra luftmotstand.



(a) Hvor lang tid tar det for pakken å reise mellom de to bygningene?

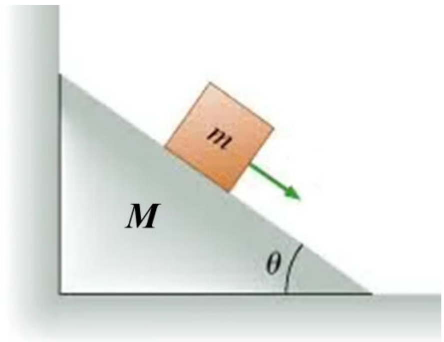
(b) Hva er initialfarten til pakken?

(c) Hva er slutthastigheten (størrelse og retning) til pakken i det den seiler gjennom vinduet?

(d) For å gjøre beregningen av banen til pakken mer realistisk, vil vi nå inkludere luftmotstand. Vi antar at luftmotstanden $\vec{F}_D$ kan beskrives ved uttrykket $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ hvor D er en konstant, $D = 1.5$ kg/m, og massen til pakken er $m = 1.0$ kg. Skissér en kode hvor du beregner banen til pakken. Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, det er nok å skrive opp initialbetingelsene og selve integrasjonsløkka.

Oppgave 2 En kloss sklir på en kile

En kile med masse M og med en helningsvinkel θ er plassert inntil en vegg som vist i figuren. En kloss med masse m sklir ned helningen. Alle overflater på klossen, kilen og gulvet er friksjonsløse, og vi ser bort fra luftmotstand.



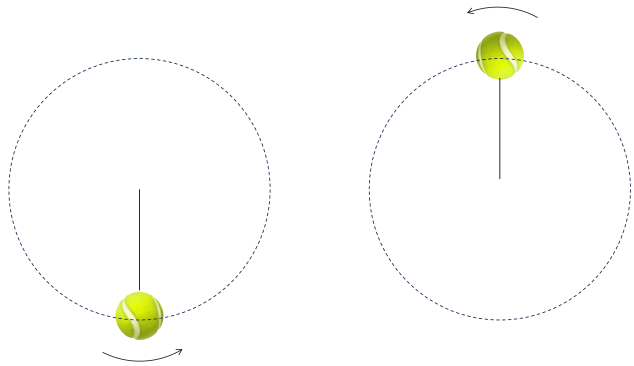
(a) Tegn to frilegemediagram: ett for klossen og ett for kilen. Husk å definere alle krefter og symboler du bruker i frilegemediagrammene.

(b) Mens klossen sklir ned helningen, blir kilen trykket mot veggen til venstre. Forklar med ord *hvorfor* kilen blir trykket mot veggen (henvis gjerne til frilegemediagrammene du tegnet i forrige oppgave). Finn også et uttrykk for kraften som kilen blir trykket mot veggen med.

(c) Nå antar vi at det legges et tynt lag sandpapir på den nederste halvdelen av helningen. Det vil si at det fortsatt ikke er friksjon den første halve delen av helningen, men når klossen har sklidd ned halve lengden ("hypotenusen") på kilen, vil klossen skli på sandpapiret. Sandpapiret har en stor dynamisk friksjonskoeffisient μ_d. Vil de følgende størrelsene øke, minke, eller forbli den samme? (Husk å begrunne svarene dine.)
(i) akselerasjonen til klossen ned helningen;
(ii) normalkraften fra klossen på kilen;
(iii) kraften fra kilen på veggen;
(iv) normalkraften fra kilen på gulvet.

Oppgave 3 Svinge en tennisball i en snor

Du svinger en tennisball i en *vertikal* sirkelbane med radius R. Figuren viser tennisballen når den er på det laveste og det høyeste punktet i banen. Vi ser bort fra luftmotstand, og vi antar at snora er masseløs.



(a) Tegn to frilegemediagram for tennisballen, ett for når den er på det laveste punktet og ett når den er på det høyeste punktet. Husk å navngi alle krefter.

(b) Er snordraget når tennisballen er på toppen av banen større, mindre, eller like stort som når tennisballen er i bunnen av banen? Husk å begrunne svaret ditt.

(c) Hva er den minste farten tennisballen kan ha på toppen av banen for å greie å holde en sirkelbane? Forklar svaret ditt.

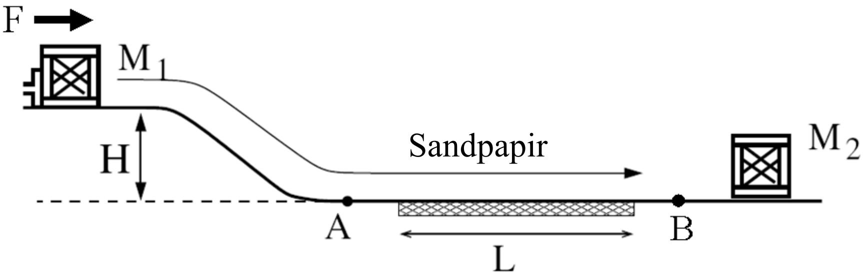
Oppgave 4 Ei kule og to klosser

To treklosser, hver med masse M, er plassert i ro i en avstand d fra hverandre på et friksjonsfritt bord. Ei veldig lita kule med masse $m \ll M$ blir skutt med en initialfart v_0 mot klossene. Vi ser bort fra luftmotstand, og kula har så liten masse at gravitasjonskraften på den er neglisjerbar i det tidsintervallet vi ser på. Kula trenger igjennom den første treklossen, og så fester den seg i den andre klossen. Farten til den første klossen etter at kula har kommet igjennom den er v_1.

(a) Finn et uttrykk for farten til den andre treklossen etter at kula fester seg i den. Her trenger du *ikke* å regne ut et tall for farten, du skal kun sette opp uttrykket for farten.

(b) Sammenlign den kinetiske energien til systemet av kula pluss de to treklossene før og etter kollisjonene ved å beregne forholdet $\frac{K_{\text{etter}}}{K_{\text{fr}}}$. Du kan bruke følgende tall: $m = 10$ g, $M = 500$ g, $v_0 = 400$ m/s, og $v_1 = 6.0$ m/s. Kommentér resultatet.

Oppgave 5 Test-oppsett for en ny attraksjon i en fornøyelsespark



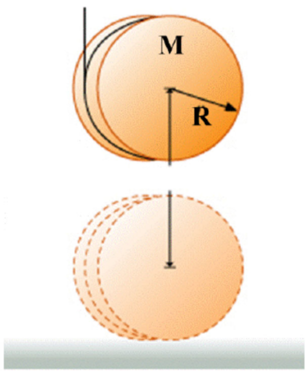
Du er med på å lage en ny attraksjon for en fornøyelsespark, og i stedet for vogner bruker du kasser i test-eksperimentene. Ei kasse med masse M_1 (kasse 1) er plassert oppe på en utskytningsrampe, hvor det er en utskytningsmekanisme som skyver på kassa med en gjennomsnittlig kraft F over et kort tidsintervall Δt. Kassa glir så ned rampen som er en høyde H over bakkenivå. Ved bunnen av rampen (punkt A) har kassa en fart v_A. Deretter kommer kassa inn i et område av lengde L som er dekket med sandpapir. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kassa og sandpapiret er μ_d. Etter å ha sklidd over sandpapiret, kolliderer kassa med ei annen kasse (kasse 2) med masse M_2, og de to kassene henger sammen og beveger seg videre mot høyre.

(a) Finn et uttrykk for farten v_{topp} til kasse 1 på toppen av rampen, etter at den har blitt dyttet med utskytningsmekanismen, men før den sklir ned rampen.

(b) Finn et uttrykk for farten v_B til kasse 1 etter at den har sklidd over sandpapiret og passerer punkt B.

(c) Finn tilslutt et uttrykk for farten v_k til de to kassene etter at de har kollidert.

Oppgave 6 En jojo



En jojo med masse M og radius R har snora si festet til taket. I starten er snora rullet opp, og så slippes jojoen (se figur). Vi antar at jojoen kan beskrives som en full sylinder, som har treghetsmoment $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ om en akse "inn i arket" som går gjennom massesenteret til jojoen. Vi ser bort fra luftmotstand og friksjon.

(a) Hva blir akselerasjonen til massesenteret til jojoen?

(b) Vi antar at snora er masseløs og at den ikke strekker seg. Hva blir snordraget i snora?

(c) Jojoen ble sluppet i en høyde h over bakken. Vi antar at snora er så lang at jojoen kan falle helt ned til bakken. Hva er farten til jojoen rett før den treffer bakken?

Oppgave 7 ChatGPT og spinn

Du ønsker å øve deg på fysikkoppgaver og spør snakke-roboten ChatGPT om å lage en oppgave til deg som omhandler spinn. ChatGPT gir deg følgende oppgave:

> "En kunstløper med masse 50 kg og med armene utstrakt roterer med en vinkelfart på 2 radianer/s. Hvis kunstløperen trekker armene inntil kroppen og reduserer treghetsmomentet sitt med en faktor 2, hva blir den nye vinkelfarten? Og hva blir det nye spinnet (angulærmomentet)?"

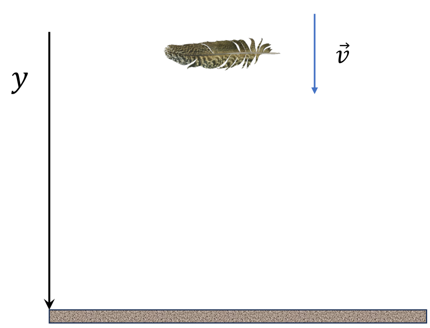
Du synes det er noe rart med denne oppgaven, og ber ChatGPT også gi et løsningsforslag. Dette svarer ChatGPT:

> "Siden kunstløperen reduserer treghetsmomentet sitt med en faktor 2, blir den nye vinkelfarten 4 radianer/s. Det nye spinnet (angulærmomentet) til kunstløperen blir 100 kg m^2/s."

Hva har ChatGPT gjort riktig og hva er feil i denne oppgaven og i løsningsforslaget?

Oppgave 8 En liten fuglefjær som faller

En fugl sitter på en gren, og en av fjærene dens løsner og begynner å falle ned mot bakken. Vi antar at fjæren har null fart i starten, og at det er vindstille slik at fjæren faller rett ned. Videre beskriver vi luftmotstanden med uttrykket $F_D = -k_v v(t)$. Vi velger positiv y-retning nedover, dvs. i samme retning som hastigheten (se figur).



(a) Vis at differensialligningen som beskriver bevegelsen til fuglefjæren er gitt som

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{k_v}{m}v = g\left(1 - \frac{v}{v_T}\right)$$

hvor vi har brukt terminalfarten $v_T = \frac{mg}{k_v}$.

(b) Ved å bruke differensialligningen over, vis at uttrykket for hastigheten til fjæren som funksjon av tiden er gitt ved

$$v(t) = v_T \left[1 - e^{-\frac{gt}{v_T}}\right].$$

(c) Diskutér hva uttrykket for hastigheten blir i grensene $t = 0$ og $t \to \infty$.

(d) Vi ønsker nå å gjøre en tilnærming til uttrykket for hastigheten ved å bruke en Taylorrekke. Finn Taylorpolynomet av grad 2 til uttrykket for hastigheten, og vi tilnærmer rundt $t = 0$. Gir tilnærmingen av uttrykket for $v(t)$ i den forrige deloppgaven fornuftige verdier for grensene $t = 0$ og $t \to \infty$? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Oppgave 9 En partikkel i farta

Et positivt ladet pion (en partikkel sammensatt av to kvarker) blir laget i en partikkelakselerator. Pionet har en gjennomsnittlig levetid på $\Delta t_0 = 2.6{\cdot}10^{-8}$ s når det er i ro.

(a) Hvor stor fart må pionet ha for å kunne tilbakelegge en avstand på 10 m i laboratoriesystemet innenfor denne levetiden? Oppgi svaret som en prosentandel av lysfarten c, hvor vi her bruker at $c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s.

(b) Sett fra et referansesystem som følger med pionet, hvor langt har pionet reist før det omdannes?

Eksamenssett slutt.

Formelark FYS1100

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{r}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,)$

Galilei-transformasjon, referansesystemer: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$, $\vec{a} = \vec{a}\,'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Statisk friksjon: $|\vec{F}_s| \le \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|\vec{F}_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Effekt: $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Konservativ kraft: 1D: $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$, $3D$: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ Stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk rotasjonsenergi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$ Rullebetingelse: $V = \omega R$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}$; G er gravitasjonskonstanten

Lorentz-transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentz-transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}$

Tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

Taylor-rekke til en funksjon $f(x)$ om funksjonsargumentet $x = a$:

$$T_n(f;a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x - a)\frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x - a)^2\frac{d^2f(x=a)}{dx^2} + \cdots + \frac{1}{n!}(x - a)^n\frac{d^nf(x=a)}{dx^n}$$

Restledd: $R_n(f;a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{d^{n+1}f(x=\zeta)}{dx^{n+1}}$ hvor $\zeta \in [x, a]$ er ukjent.

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:

$q(x)\cdot\frac{dx}{dt} = p(t) \Longrightarrow \int q(x)\,dx = \int p(t)\,dt \Longrightarrow Q(x) = P(t) + C$, med $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Longrightarrow$ Karakteristisk likn. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ med generelt to røtter $\lambda_1$og λ_2.

Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2t\,e^{\lambda t}$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$: $x(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$