

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2024

Dato: Onsdag 4. desember 2024, kl. 9:00-13:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 4 sider + et formelark.

Tillatte hjelpemidler:

Rottmann: "Matematisk formelsamling".

Elektronisk kalkulator av godkjent type.

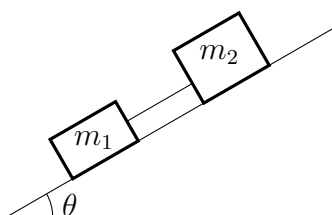
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Husk at alle svar må begrunnes!

Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 To klosser

To klosser ligger på et skråplan med helningsvinkel θ . Klossene har massene m_1 og m_2 , og friksjonstallene mellom klossene og underlaget er μ_1 og μ_2 (vi antar for enkelhets skyld at de dynamiske og statiske friksjonstallene er like). Klossene er forbundet med en massesløs snor.



- a) Tegn to frilegemediagrammer, ett for hver kloss. Husk å navngi alle kreftene. Du kan anta at friksjonen er liten nok slik at begge klossene glir nedover skråplanet.
- b) Vis at klossene får en akselerasjon

$$a = g \sin \theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \theta$$

når vi velger positiv retning nedover langs skråplanet og at snordraget i snora mellom dem er

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mu_2 - \mu_1) g \cos \theta.$$

- c) For å sjekke at slike uttrykk er riktige er det ofte nyttig å undersøke grensetilfeller (spesielle valg av parametre) der disse uttrykkene forenkles slik at vi kan se at de stemmer med en enklere situasjon som vi kan analysere.

Finn minst to grensetilfeller der du kan bekrefte at uttrykkene over stemmer.

- d) Hvis vi ser på grensetilfellet $\mu_1 = 0$ og $\mu_2 \rightarrow \infty$ ser vi at $T \rightarrow \infty$. Hva er riktig verdi for T i dette tilfellet? Forklar hvorfor formelen ikke gir den riktige verdien.

- e) For gitte verdier av θ , m_1 og m_2 , hvilke verdier av μ_1 og μ_2 gjør at begge klossene blir liggende uten å begynne å gli?

Oppgave 2 Svingninger

Ei fjær som ikke følger Hookes lov har en kraft som er gitt ved

$$F(x) = -kx - cx^2$$

der k og c er konstanter og x er forlengelsen i forhold til likevektslengden ($x < 0$ svarer til at fjæra komprimeres).

- Finne den potensielle energien til fjæra som funksjon av x .
- Fjæra henges vertikalt ned fra taket, og det festes et lodd med massen m i enden. Hva er forlengelsen x_0 til fjæra når loddet henger i ro?
- Skriv ned differensiallikninga som beskriver bevegelsen til loddet.
- Vi lar $x = x_0 + \xi$, der $\xi \ll x_0$ er et lite utslag fra likevektsposisjonen. Hva er frekvensen til små svingninger av loddet omkring likevektsposisjonen?

Oppgave 3 Med og uten friksjon

En ball ruller med hastighet \vec{v} langs en horisontal vei uten å skli og kommer til en oppoverbakke som stiger med konstant helningsvinkel. I hvilket tilfelle kommer ballen lengst opp bakken: hvis bakken har nok friksjon slik at ballen ikke sklir, eller hvis bakken er helt glatt slik at det er ingen friksjon? Begrunn svaret ditt både ved hjelp av energiargumenter og ved hjelp av Newtons andre lov.

Oppgave 4 Spiralformet vei

En vogn triller ned en spiralformet vei som har radius R . Det er friksjon mellom hjula og bakken med friksjonskoeffisient μ_s . Du kan anta at hjula er tilnærmet masseløse og se bort fra luftmotstand og rullemotstand. Veien heller nedover med en vinkel θ i forhold til horisontalen.



- Tegn et frilegemediagram som viser kreftene som virker på vogna. Husk å navngi alle krefter og forklar hva de er.
- I hvilken retning peker akselerasjonen? Her trenger du ikke å gi et analytisk svar i form av et matematisk uttrykk, men forklare kvalitativt retningen på akselerasjonen i forhold til relevante retninger. Bruk gjerne tegninger for å illustrere.
- Hva er uttrykket for farta v som funksjon av høyden h under starthøyden?
- Hvor lang tid bruker vogna på å nå denne høyden?
- Hvor langt ruller vogna før den begynner å gli utover?

Oppgave 5 Beregne kometbane

Du vil simulere banen til en komet med massen m som beveger seg i en bane rundt sola. Du plasserer origo i sola som har massen $M \gg m$ og lar posisjonen til kometen være beskrevet av koordinatene x og y (banen vil alltid ligge i et plan, slik at vi ikke trenger noen z -koordinat).

- Vis at kometens bevegelse er beskrevet av difflikningene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}}x \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}}y$$

- Vi vet at kometer følger ellipsebaner med sola i det ene brennpunktet. I en slik bane, hvilke av disse størrelsene er bevart under bevegelsen: Kinetisk energi, total mekanisk energi og spinn?
- Gjør tyngdekrafta noe arbeid i noen del av banen? Er isåfall dette arbeidet positivt eller negativt?
- Hvis vi vet at kometen i det punktet i banen som er nærmest sola har avstanden r_1 fra sola og farta v_1 , hva er da den største avstanden til sola? Og hva er farta i det punktet?
- Her er vist et program som beregner kometens bane numerisk:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Bruker enheter der GM=1

T = 50.
dt = 0.1
n = int(T/dt)

x = np.zeros(n)
y = np.zeros(n)
vx = np.zeros(n)
vy = np.zeros(n)
t = np.zeros(n)

x[0] = 1.
y[0] = 0
vx[0] = 0
vy[0] = 1.2

for i in range(n-1):
    r32invers = 1/(x[i]**2 + y[i]**2)**(1.5)
```

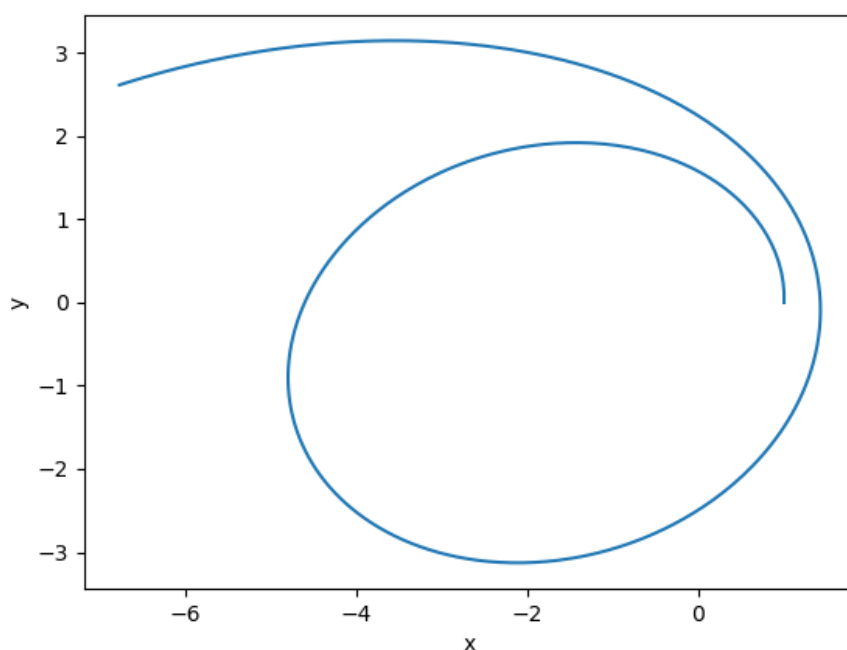
```

vx[i+1] = vx[i] - x[i]*r32invers*dt
vy[i+1] = vy[i] - y[i]*r32invers*dt
x[i+1] = x[i] + vx[i]*dt
y[i+1] = y[i] + vy[i]*dt
t[i+1] = t[i] + dt

plt.plot(x,y)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.savefig('komet.png')
plt.show()

```

Dette gir følgende graf for kometens bane rundt sola:



Hvordan stemmer denne banen med det vi forventer? Hva kan være årsakene til at den simulerte banen ikke er helt slik den er i virkeligheten?

- f) Koden kan endres slik at den gir bedre resultater. Hva slags endringer ville du gjort for å gjøre simuleringa mer nøyaktig?
- g) Du vil undersøke om solvinden kan påvirke kometens bane. Solvinden består av ladde partikler som strømmer radielt ut fra sola. Vi antar for enkelhets skyld at dette gir en radiell kraft på kometen som er uavhengig av farta til kometen. Men vi vil ta hensyn til at tettheten til solvinden må avta med avstanden til sola, fordi partiklene blir fordelt over en større flate. Derfor vil vi anta at krafta fra solvinden avtar omvendt proporsjonalt med avstanden til sola. Hva må du endre i koden for å ta hensyn til denne krafta?

Eksamenssett slutt.