UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2023
Dato: Tirsdag 30. mai 2023, kl. 09:00-13:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 4 sider (formelark bakerst på side 5).
Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: "Matematisk formelsamling".
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.
Husk at alle svar må begrunnes!
Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 Baron von Münchhausen

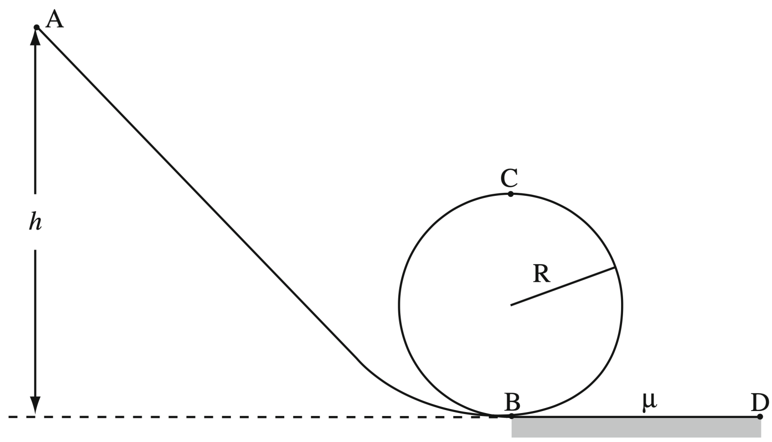
I en av fortellingene om Baron von Münchhausen løfter den berømte baronen seg selv og hesten sin ut av ei myr ved å dra i sitt eget hår, se illustrasjon. Er dette mulig å gjøre? Hvorfor eller hvorfor ikke? Bruk det du har lært om Newtons lover og indre og ytre krefter i argumentasjonen din.

Oppgave 2 Fermiproblem: Flytte Mount Fuji

Hvor mange lastebil-lass trengs for å flytte Mount Fuji? Forklar hvordan du tenker og beskriv hvilke antagelser du gjør for å beregne antallet lastebil-lass.
(Bilde av Suicasmo, fra Wikipedia).

Oppgave 3 En kloss i en loop

En liten kloss glir ned langs en rampe og deretter gjennom en loop med radius R, se figur. Etter loopen stanser klossen i punkt D på et horisontalt bord med en ru overflate. Klossen starter i ro ved punkt A i høyde h over bordet. Friksjonen på rampen og i loopen er neglisjerbar, og vi ser hele tiden bort fra luftmotstand. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom klossen og bordet er μ_d.



(a) Finn farten v_B til klossen ved punkt B før den går rundt loopen.

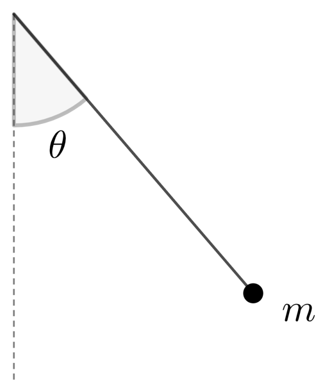
(b) Finn farten v_C ved punkt C.

(c) Hva er betingelsen for farten v_C slik at klossen holder kontakt med loopen?

(d) Hvor høyt over bordet må klossen slippes for å gå rundt loopen?

(e) Hvor langt sklir klossen på bordet før den stanser?

Oppgave 4 Pendel med luftmotstand



Figuren viser en pendel rett før den slippes. Vinkelen θ_0 er mellom vertikalen og snora i det den slippes, og θ er vinkelen som funksjon av tiden. Vi antar at snora er masseløs og stram, og snora har lengde R.

Akselerasjonen til pendelen i tangentiell retning a_T er gitt ved

$$a_T = -g \sin\theta \tag{1}$$

dersom vi ser bort fra luftmotstand. Vi kan bruke buelengden $b = R\theta$ for å angi strekningen som pendelen beveger seg, og vi kan da uttrykke den tangentielle akselerasjonen som

$$a_T = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha,$$

hvor α er vinkelakselerasjonen. Vi skal nå ta hensyn til luftmotstand, og vi skal bruke en luftmotstandskraft $\vec{F}_D$ som er gitt ved

$$\vec{F}_D = -D\vec{v}$$

der D er en konstant som beskriver størrelsen på motstanden, og $\vec{v}$ er pendelens hastighet.

(a) Uttrykk luftmotstandskraften som en funksjon av vinkelfart ved å bruke buelengden, og finn et uttrykk for den tangentielle akselerasjonen i ligning (1) med luftmotstand inkludert.

(b) Vis at vinkelen $\theta(t)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{R}\sin(\theta) = 0. \tag{2}$$

(c) Dersom vi vil løse denne differensialligningen analytisk, hvorfor er det da hensiktsmessig å Taylorutvikle $\sin(\theta)$ rundt 0 for denne differensialligningen? Bruk Taylorutviklingen til første orden til å skrive om differensialligningen fra c) slik at den er lineær i θ og dens deriverte.

(d) Løs differensialligningen analytisk med tilnærmingen fra forrige deloppgave med de gitte initialbetingelsene.

(e) Skissér en kode som beregner vinkelfart $\omega(t)$ og vinkel $\theta(t)$ ved å numerisk integrere ligning (2). Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, det er nok å skrive opp initialbetingelsene og selve integrasjonsløkka. Begrunn ditt valg av numerisk metode.

Oppgave 5 En stang roterer

En lang, tynn stav med masse m og lengde L er festet i et hengsel ved den ene enden, og kan rotere uten friksjon i hengselet, og vi ser også bort fra luftmotstand. Staven holdes først i den andre enden slik at den er i en horisontal posisjon. Når denne enden av staven slippes, vil staven rotere om hengselet. Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om ett av endepunktene er gitt ved $I = \frac{1}{3}mL^2$.

(a) Tegn et frilegemediagram for staven når den er i en horisontal posisjon og nettopp har blitt sluppet i den frie enden. Husk å navngi alle krefter.

(b) Finn alle kraftmomentene som virker på staven om rotasjonsaksen gjennom hengselet rett etter at staven slippes.

(c) Bestem størrelsen på normalkraften i hengselet rett etter at staven slippes.

(d) Er mekanisk energi bevart i denne situasjonen? Er bevegelsesmengde bevart? Er spinn bevart? Husk å begrunne svaret ditt.

(e) Bestem vinkelfarten til staven i det den har rotert fra horisontal til vertikal posisjon.

Oppgave 6 Astronauten

En astronaut slapper av i romskipet sitt, som passerer Jorda med en hastighet på $0.60c$.

(a) Astronauten i romskipet har en puls på 65 hjerteslag per minutt. Hva er pulsen til astronauten målt av en observatør på Jorda?

(b) Astronauten får lyst til å måle hvor langt romskipet er, og måler med et målebånd at romskipet er 80 m. Så får astronauten lyst til å kjøre fortere enn $0.60c$ og øker farten til romskipet. Etter fartsøkningen måler en observatør på Jorda at romskipet er 60 m. Hvor fort kjører romskipet nå, etter fartsøkningen?

Eksamenssett slutt.

Formelark FYS1100

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{r}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Galilei-transformasjon, referansesystemer: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$, $\vec{a} = \vec{a}'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Statisk friksjon: $|\vec{F}_s| \leq \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|\vec{F}_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Effekt: $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Konservativ kraft: 1D: $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$, $3D$: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ Stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk rotasjonsenergi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$ Rullebetingelse: $V = \omega R$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$; G er gravitasjonskonstanten

Lorentz-transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentz-transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v-u}{1-\frac{u}{c^2}v}$

Tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

Taylor-rekke til en funksjon $f(x)$ om funksjonsargumentet $x = a$:

$$T_n(f;a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)\frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x-a)^2\frac{d^2f(x=a)}{dx^2} + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n\frac{d^nf(x=a)}{dx^n}$$

Restledd: $R_n(f;a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{d^{n+1}f(x=\zeta)}{dx^{n+1}}$ hvor $\zeta \in [x,a]$ er ukjent.

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:

$q(x)\cdot\frac{dx}{dt} = p(t) \Longrightarrow \int q(x)\,dx = \int p(t)\,dt \Longrightarrow Q(x) = P(t) + C$, med $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Longrightarrow$ Karakteristisk likn. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ med generelt to røtter $\lambda_1$og λ_2.

Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2t\,e^{\lambda t}$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$: $x(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$