UNIVERSITETET I OSLO

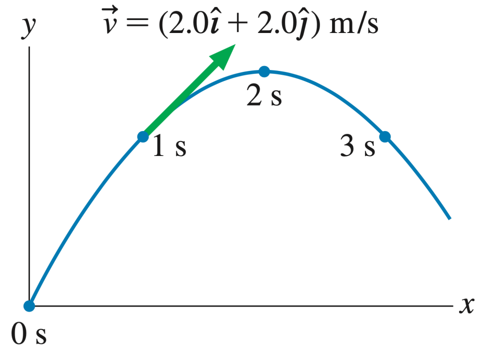
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2024
Dato: Mandag 27. mai 2024, kl. 15:00-19:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 5 sider (formelark bakerst på side 6).
Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: "Matematisk formelsamling".
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.
Husk at alle svar må begrunnes!
Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 Ballkast på planeten Dagobah

En fysikkstudent på planeten Dagobah kaster en ball, og ballen følger en parabolsk bane som vist i figuren (vi ser bort fra luftmotstand). Ballens posisjon er vist for tidsintervaller på 1.0 s ved $t_1 = 1.0$ s, $t_2 = 2.0$ s, og $t_3 = 3.0$ s. Ballen er ved sin maksimale høyde ved tiden $t_2 = 2.0$ s. Ved $t_1 = 1.0$ s, så er ballens hastighet gitt ved $\vec{v}(t_1) = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s.



(a) Finn ballens hastighet $\vec{v}$ ved $t_2 = 2.0$ s og $t_3 = 3.0$ s.

(b) Hva er verdien på tyngdeakselerasjonen g_{Dagobah} for denne planeten?

(c) Hva var ballens utgangsfart v_0 og utgangsvinkel θ_0 med horisontalen?

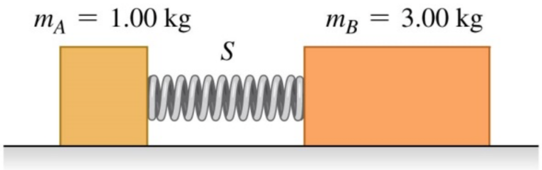
Oppgave 2 Klemme Jorda inn i en fyrstikk-eske

En venn av deg påstår at hvis alle atomene i Jorda ble komprimert slik at det ikke lenger er noe tomrom mellom atomkjernen og elektronene i atomene, slik at Jorda får samme tetthet som en atomkjerne, så kunne Jorda få plass i en fyrstikkeske. Går dette an? Løs dette som et Fermi-problem, husk å forklare tankegangen din og alle stegene i utregningen. Bruk gjerne følgende tall for å gi et estimat og vurdere om påstanden er fornuftig eller ikke:

- Gjennomsnittlig tetthet for Jorda: $\rho_J = 5.51\ \mathrm{g/cm^3}$.
- Jordas radius: $R_J = 6371$ km.
- Tettheten til en atomkjerne er det samme som tettheten til nøytronstjerner, som er den tetteste materien som finnes i universet, bortsett fra svarte hull: $\rho_N \approx 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$.
- En vanlig fyrstikkeske er ca. 6 cm lang, 4 cm bred og 2 cm høy.

Oppgave 3 To klosser og ei fjær

Vi har to klosser og ei fjær plassert på et horisontalt, friksjonsfritt bord (se figur). Vi ser bort fra luftmotstand. Kloss A har masse $m_A = 1.00$ kg og kloss B har masse $m_B = 3.00$ kg. Klossene presses sammen, slik at fjæra som er plassert mellom klossene blir komprimert. Klossene og den komprimerte fjæra er i ro, og så slippes systemet fritt. Fjæra, som har neglisjerbar masse, er ikke festet til klossene, slik at fjæra bare faller rett ned på bordet når klossene beveger seg bort fra hverandre. Etter at fjæra har mistet kontakt med klossene, har kloss B fått en hastighet $v_B = 1.20$ m/s mot høyre.

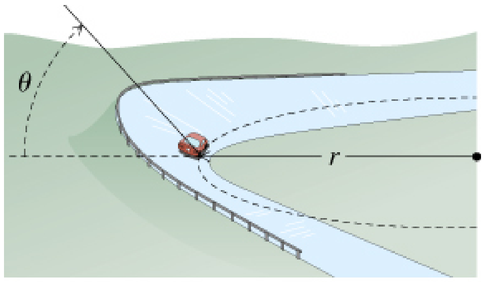


(a) Tegn to frilegemediagram for situasjonen i det systemet slippes løs, men før fjæra har mistet kontakt med klossene: ett for kloss A og ett for kloss B. Husk å definere alle krefter og symboler du bruker i frilegemediagrammene.

(b) Etter at fjæra har mistet kontakt med klossene, hva blir hastigheten til kloss A?

(c) Hvor mye potensiell energi var lagret i fjæra?

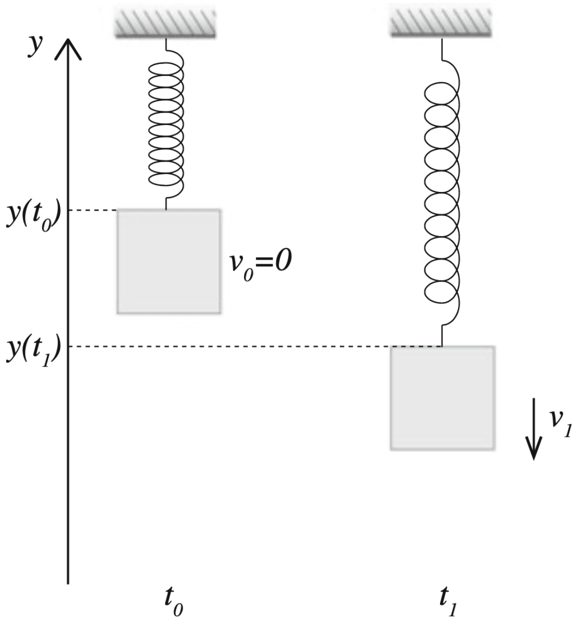
Oppgave 4 Daytona Racerbane



En av svingene i Daytona Racerbane har en helningsvinkel θ og radius r. Dersom det ikke er friksjon så kan bilen klare svingen (dvs. holde samme høyde i helningen) for en gitt fart v. Forklar om bilene kan kjøre fortere, saktere, og/eller med samme fart dersom det er friksjon mellom hjulene og underlaget. Kommenter også retningen på friksjonskraften.

Oppgave 5 En kloss hengende i ei fjær

En kloss med masse m er festet til ei fjær, som igjen er festet til taket (se figur). Fjærkonstanten er k, og fjærkraften kan beskrives med Hookes lov, $F_k(y) = -ky$ (dvs. likevektslengden til fjæra er ved høyde $y = 0$ m). Vi velger positiv retning oppover som vist i figuren. Vi ser foreløpig bort fra luftmotstand.



(a) Klossen henger først i ro. Vis at likevektshøyden y_L der klossen er i ro er gitt ved

$$y_L = -\frac{mg}{k}.$$

(b) Nå trykker vi klossen oppover mot taket, slik at fjæra er i sin likevektslengde ($y(t_0) = 0$ m), og så slipper vi klossen ved tid $t_0 = 0$ s (se figur). Vis at differensialligningen som beskriver klossens bevegelse er gitt ved

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_L).$$

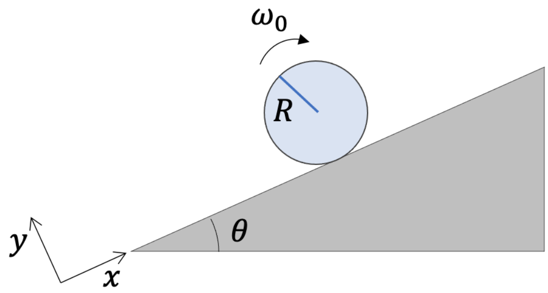
(c) Løs differensialligningen i forrige deloppgave for å finne posisjonen $y(t)$ til klossen som funksjon av tid.

(d) Vi introduserer nå luftmotstand, og vi bruker at luftmotstandskraften kan beskrives ved $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$. Hva blir differensialligningen som beskriver klossens bevegelse nå?

(e) Skissér en kode for å beregne hastigheten og posisjonen til klossen som funksjon av tid. Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, det er nok å skrive opp initialbetingelsene og selve integrasjonsløkka.

Oppgave 6 En roterende sylinder

En sylinder roterer om symmetriaksen gjennom massesenteret sitt med en vinkelfart ω_0. Sylinderen har masse M og radius R, og treghetsmomentet for rotasjon om symmetriaksen gjennom massesenteret er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Så settes sylinderen ned på et skråplan med helningsvinkel θ, se figur. Vi legger x-aksen opp langs skråplanet og y-aksen normalt på skråplanet. Når sylinderen settes ned, vil den både rulle og skli samtidig. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom sylinderen og skråplanet er μ_d. Vi ser bort fra luftmotstand.



(a) Tegn et frilegemediagram for den roterende sylinderen rett etter at den er satt ned på skråplanet. Husk å navngi alle krefter.

(b) Finn posisjonen $x(t)$ til sylinderen som funksjon av tiden fra det øyeblikket sylinderen settes ned til den begynner å rulle uten å skli.

(c) Diskuter bevegelsen for forskjellige verdier av vinkelen θ i forhold til den dynamiske friksjonskoeffisienten μ_d; hvordan beveger sylinderen seg hvis
(i) $\tan\theta < \mu_d$,
(ii) $\tan\theta > \mu_d$,
(iii) $\tan\theta = \mu_d$?

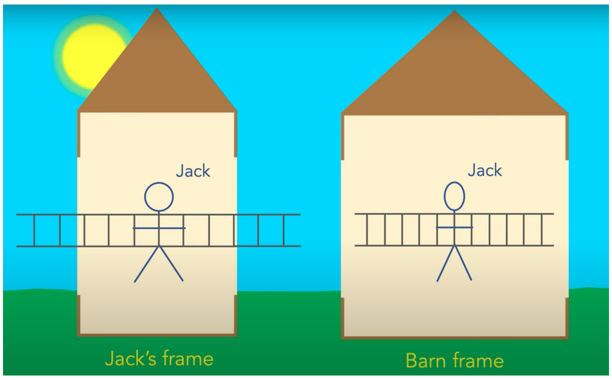
(d) Finn et uttrykk for vinkelhastigheten $\vec{\omega}(t)$ til sylinderen som funksjon av tid fra det øyeblikket sylinderen settes ned til den begynner å rulle uten å skli. Vær oppmerksom på rotasjonsretningen og retningen til vinkelakselerasjonen.

(e) Vi ser nå på situasjonen hvor $\tan\theta < \mu_d$. Vis at tiden det tar for sylinderen å oppnå rullebetingelsen (rulle uten å skli) er gitt ved

$$t_{\text{Rulle}} = \frac{\omega_0 R}{3\mu_d g\cos\theta - g\sin\theta}.$$

Oppgave 7 En relativistisk stige

Jack jobber på en gård, og han har en veldig lang stige som, når den er i ro, dessverre ikke får plass i låven men endene vil stikke ut gjennom dørene på hver side av låven. På fritiden har Jack har lest om Einstein og den spesielle relativitetsteorien. Jack får en lys idé: hva om han løper veldig fort, slik at stigen får en lengdekontraksjon? Sett fra et referansesystem hvor låven er i ro, vil kanskje stigen få plass i låven likevel, hvis han greier å løpe fort nok! Men så blir Jack bekymret. Sett fra Jack og stigens referansesystem, vil det jo se ut som at det er låven som er lengdekontrahert, og da vil begge endene av stigen stikke ut gjennom dørene på låven samtidig (se illustrasjon). Kan du hjelpe Jack med å finne ut av dette problemet? Her trenger du ikke gjøre noen utregninger, om du ønsker kan du gjerne forklare med ord hvordan denne problemstillingen kan løses.



Eksamenssett slutt.

Formelark FYS1100

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{r}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Galilei-transformasjon, referansesystemer: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$, $\vec{a} = \vec{a}'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Statisk friksjon: $|\vec{F}_s| \le \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|\vec{F}_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Effekt: $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Konservativ kraft: 1D: $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$, $3D$: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ Stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk rotasjonsenergi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$ Rullebetingelse: $V = \omega R$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$; G er gravitasjonskonstanten

Lorentz-transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentz-transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}$

Tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

Taylor-rekke til en funksjon $f(x)$ om funksjonsargumentet $x = a$:

$$T_n(f;a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x - a)\frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x - a)^2\frac{d^2f(x=a)}{dx^2} + \cdots + \frac{1}{n!}(x - a)^n\frac{d^nf(x=a)}{dx^n}$$

Restledd: $R_n(f;a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{d^{n+1}f(x=\zeta)}{dx^{n+1}}$ hvor $\zeta \in [x, a]$ er ukjent.

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:
$q(x)\cdot\frac{dx}{dt} = p(t) \Longrightarrow \int q(x)\,dx = \int p(t)\,dt \Longrightarrow Q(x) = P(t) + C$, med $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$
2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Longrightarrow$ Karakteristisk likn. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ med generelt to røtter $\lambda_1$og λ_2.
Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2t\,e^{\lambda t}$
To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$: $x(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$