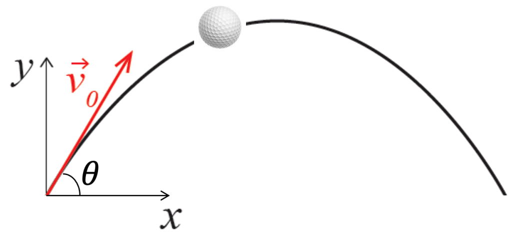
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Dato: Mandag 26. mai 2025, kl. 15:00-19:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 5 sider (formelark bakerst på side 6 [ny versjon] og side 7 [gammel versjon for de som foretrekker den]).
Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: "Matematisk formelsamling".
Elektronisk kalkulator av godkjent type.
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes! Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1   Spille golf

En golfspiller slår en golfball og får til "hole-in-one", altså at ballen lander i hullet med bare ett slag. Golfballen slås slik at den får en initialhastighet $\vec{v}_0$ som danner en vinkel θ med horisontalen, se illustrasjon. Vi legger origo i startposisjonen til golfballen, med x-aksen langs horisontalen og y-aksen i vertikal retning.
Merk: Fra og med deloppgave b) antar vi at luftmotstanden er neglisjerbar.



(a) Tegn et frilegemediagram på golfballen når den er i posisjonen på banen som vist i figuren. Husk å navngi alle krefter.

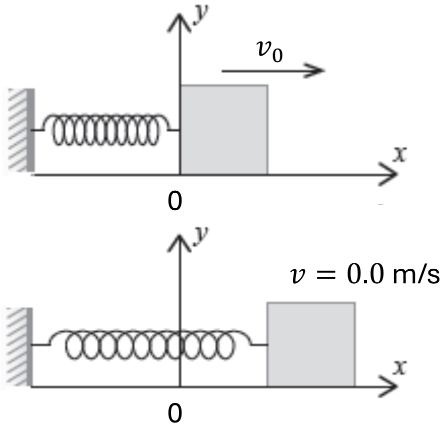
(b) Vi antar nå at luftmotstanden er neglisjerbar. Finn et uttrykk for golfballens hastighet $\vec{v}$ som funksjon av tid t, startfarten $v_0 = |\vec{v}_0|$ og utgangsvinkelen θ. Du kan oppgi $\vec{v}$ på vektorform eller på komponent-form.

(c) Vis at golfballen bruker en tid
$$t_1 = \frac{2v_0}{g}\sin\theta$$
på å lande i golfhullet (ved høyde $y(t_1) = 0.0$ m).

(d) Vis at strekningen mellom utslagsstedet (origo) og golfhullet, som er i posisjon $x_1 = x(t_1)$, er gitt ved
$$x(t_1) = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta).$$

Oppgave 2   En kloss i en fjær

En kloss med masse m er festet til en masseløs fjær som følger Hookes lov, se figur. Klossen har fjærkonstant k. Klossen befinner seg på et friksjonsfritt, horisontalt underlag, og vi ser bort fra luftmotstand. Klossen starter i origo, dvs. i en x-posisjon $x_0 = 0.0$ m med en initialfart v_0 i positiv x-retning. Når klossen er i posisjon x_0, er fjæren verken strukket eller komprimert.



(a) Tegn et frilegemediagram for klossen når fjæren er maksimalt strukket ut, som vist i den nedre delen av figuren. Husk å navngi alle krefter.

(b) Vis at klossens bevegelse kan beskrives ved følgende differensialligning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

(c) Løs differensialligningen for å finne et uttrykk for posisjonen $x(t)$ til klossen.

(d) Vi ønsker nå å ta hensyn til luftmotstanden, og vi modellerer luftmotstandskraften som $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ hvor D er en konstant. Hva blir differensialligningen som beskriver klossens bevegelse nå?
[NB: manglet minus foran luftmotstanden i versjonen sendt til trykking.]

(e) Skissér en kode som løser denne differensialligningen numerisk. Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, det er nok å skrive opp initialbetingelsene og selve integrasjons-løkka. Begrunn ditt valg av numerisk metode.

Oppgave 3 Fermi-paradokset

Det såkalte Fermi-paradokset er ett av de mest berømte størrelsesorden-estimatene. Her ser man på en tilsynelatende motsigelse: sannsynligheten for at et betydelig antall intelligente sivilisasjoner eksisterer i vår galakse (og i universet) er relativt stor, men likevel har vi så langt ikke oppdaget noen andre intelligente sivilisasjoner. I et forsøk på å estimere denne sannsynligheten, publiserte Frank Drake den følgende ligningen i 1965:

$$N = R^* \cdot f_p \cdot n_e \cdot f_l \cdot f_i \cdot f_c \cdot L,$$

hvor symbolene betyr:

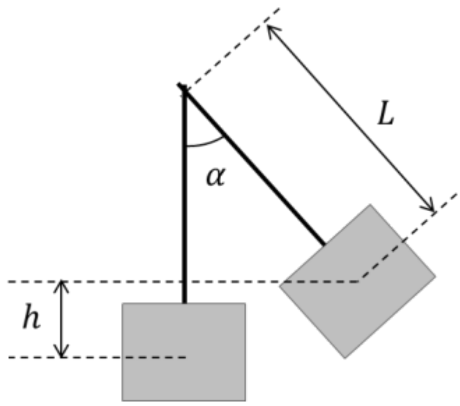
- N er antall teknologisk avanserte sivilisasjoner i Melkeveien hvor kommunikasjon med oss kan være mulig.
- R^* er den gjennomsnittlige raten av stjernedannelse i Melkeveien, $R^* \approx 1.5 - 3$ stjerner per år.

- f_p er andelen av disse stjernene som har planetsystemer. Det ser ut som mange stjerner har planeter, så vi kan anta $f_p \approx 0.5 - 1$.
- n_e er andelen planeter per solsystem som har et miljø som passer for organisk liv, $n_e \approx 3 - 5$, men har også et estimat så lavt som $n_e = 0.2$.
- f_l er andelen av disse passende planetene hvor det faktisk er organisk liv, $f_l \approx 1$.
- f_i er andelen av planeter hvor *intelligent* liv utvikles; denne faktoren er svært kontroversiell og usikker, et estimat er $f_i = 0.0002$, et annet er $f_i = 1$.
- f_c er andelen av sivilisasjoner som når et høyt nok teknologisk nivå til å sende signaler som kan detekteres av andre sivilisasjoner, og denne er også svært usikker, men et estimat er $f_c = 0.2$.
- L er hvor lenge disse sivilisasjonene sender ut signaler i verdensrommet, estimert til ≈ 420 år, men kan også være så lang tid som 10^9 år.

Det er spesielt de siste fire faktorene som er svært usikre. Basert på disse tallene, hva er den største og den minste verdien N kan ha? Hva tenker du er årsaken(e) til at de siste fire faktorene er usikre?

Oppgave 4 Ei kule og en trekubbe

En trekubbe på 5.00 kg henger i en 1.00 m lang snor som har neglisjerbar masse. Du skyter ei kule med masse $m = 10.0$ g horisontalt inn i kubben med hastighet $v = 400$ m/s. Kula setter seg fast inne i trekubben i kollisjonen, og trekubben svinger opp. Vi ser bort fra luftmotstand.



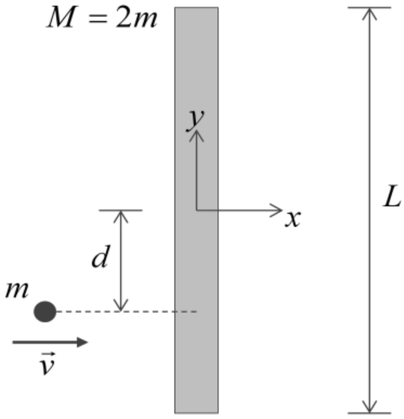
(a) Hvor mye kinetisk energi K har kula før kollisjonen?

(b) Hvor mye kinetisk energi K_1 har trekubben og kula etter kollisjonen?

(c) Hvilken vinkel α (se figur) får vi når trekubben med kula når sin maksimale høyde?

Oppgave 5 Ei kule og en stav

Ei kule med masse m skytes inn i en tynn, homogen stav med lengde L. Staven ligger på et horisontalt bord som har en friksjonsfri overflate, og vi ser også bort fra luftmotstand. Staven har masse M, som vi setter lik $M = 2m$. Kula treffer staven i en rett vinkel med fart v i en avstand d fra massesenteret til staven, se figur. Etter kollisjonen blir kula sittende fast inne i staven. Tykkelsen til staven er ubetydelig i forhold til lengden, og vi kan betrakte kula som en punktpartikkel. Vi legger origo til koordinatsystemet i massesenteret til staven som vist i figuren, hvor vi ser situasjonen ovenfra (z-aksen oppover er i vertikal retning).



(a) Rett etter kollisjonen, hva er massesenteret $\vec{R}$ til systemet som består at kula pluss staven?

(b) Finn hastigheten $\vec{V}$ som massesenteret av systemet kule pluss stav får etter kollisjonen.

(c) Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om en akse gjennom sitt massesenter er gitt ved $I = \frac{1}{12}ML^2$. Kula treffer staven i en avstand $d = \frac{1}{4}L$ fra midten av staven. Vis at treghetsmomentet til systemet kula pluss staven om en akse gjennom deres nye, felles massesenter er

$$I_{cm} = \frac{10}{3}md^2.$$

(d) Finn et uttrykk for vinkelhastigheten om massesenteret til systemet bestående av staven og kula. Beskriv bevegelsen med ord.

Oppgave 6 En partikkel som henfaller

En partikkel blir dannet i en kollisjon mellom høy-energetiske protoner i en partikkelakselerator. Etter at partikkelen er dannet, beveger den seg med en konstant, høy hastighet nær lysets hastighet før den henfaller. I et referansesystem som følger partikkelen (hvor partikkelen er i ro), har partikkelen en levetid τ. Du befinner deg i laboratoriet, og i laboratoriets referansesystem måler du at partikkelen henfaller etter å ha beveget seg en avstand d fra kollisjonspunktet. Vi har to hendelser: (1) partikkelen oppstår i kollisjonen; (2) partikkelen henfaller.

(a) I hvilket referansesystem blir egentiden Δt_0 målt? Forklar også hvorfor dette referansesystemet er der hvor egentiden måles.

(b) Finn et uttrykk for hastigheten v til partikkelen i laboratoriesystemet som funksjon av avstanden d og konstantene τ og lysets hastighet c.

Eksamenssett slutt.