UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

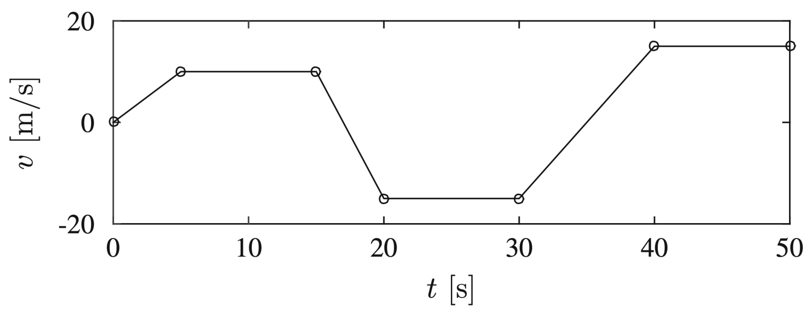
Løsningsforslag
(ACL & AEG & GF, 24.09.2023)

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2023
Dato: Mandag 9. oktober 2023, kl 15:00-18:00 (3 timer)
Digital eksamen i Inspera, 20 flervalgsoppgaver.
Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: "Matematisk formelsamling"
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Oppgave 1 En katt på tur

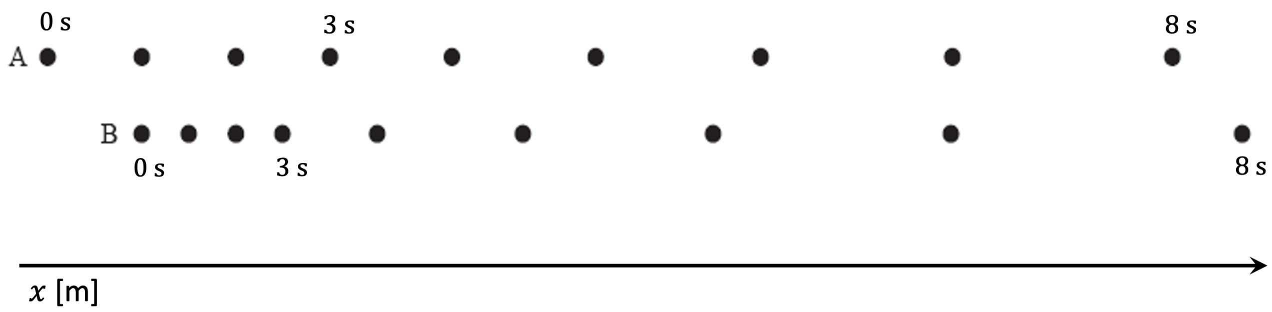
Hastigheten til en katt som beveger seg på en flat gressplen (hvor vi legger x-aksen) er gitt i figuren. Hvilken påstand er riktig?

- Katten beveger seg alltid med konstant hastighet.
- Katten har alltid en positiv akselerasjon.
- Katten har en positiv akselerasjon i tidstintervallet $t = 30 - 40$ s.
- Katten har en negativ akselerasjon i tidsintervallet $t = 30 - 40$ s.



Løsning: Siden hastigheten endrer seg med tiden, kan ikke hastigheten være konstant. Siden hastigheten går fra å være positiv til negativ, og så blir positiv igjen kan ikke akselerasjonen alltid være positiv. Vi ser at hastigheten har en positiv stigning mellom 30-40 sekunder, som betyr at akselerasjonen i dette tidsintervallet er positiv.

Oppgave 2 To biler som kjører

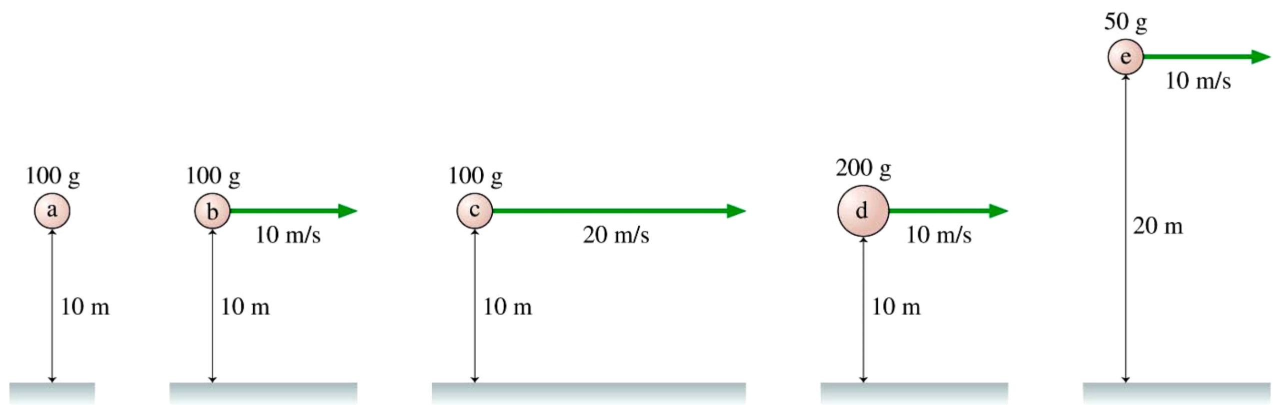


Figuren viser 9 prikker fra bevegelsesdiagrammet til to biler, A og B. Prikkene angir posisjonen til den gitte bilen og er markert med tiden i sekunder. Tidsintervallet mellom to punkter er 1 s. Begge bilene starter klokka ved $t = 0$ s men ved litt forskjellig startposisjon. Begge bilene har konstant fart i begynnelsen, og ved $t = 3$ s begynner begge bilene å akselerere. Vil bilene noen gang ha den *samme farten* ved den *samme tiden*?

- Ja, i tidsintervallet fra $t = 4$ s til $t = 5$ s
- Ja, i posisjonen hvor $t = 2$ s
- Ja, i posisjonen hvor $t = 7$ s
- Ja, i tidsintervallet fra $t = 6$ s til $t = 7$ s
- Nei, de vil aldri ha den samme farten.

Løsning: Alle tidsintervallene er like, $\Delta t = 1$ s. Fra figuren ser vi at forflytningen Δx er den samme for de to bilene kun mellom prikkene ved tidsintervallet $t = 4$ s til $t = 5$ s, så her er $v = \Delta x/\Delta t$ lik.

Oppgave 3 Kuler som faller (I)

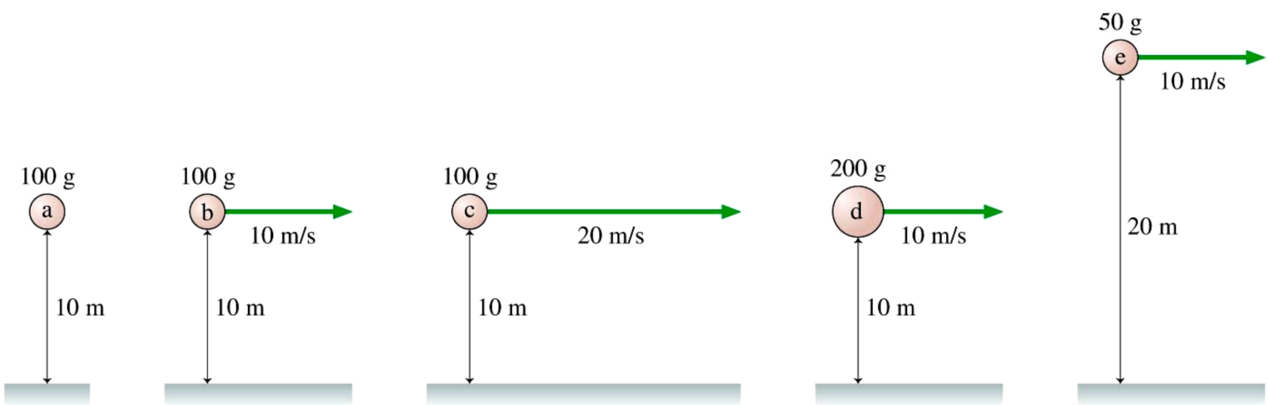


Vi har fem små stålkuler a, b, c, d, e som vist i figuren. Vi ser bort fra luftmotstand. Rangér, fra lengst til kortest, tiden det tar for kulene å treffe bakken.

- $e > a = b = c = d$
- $e = d > a = b = c$
- $c > a > b > d > e$
- $a > b > c > d > e$
- $e > d > c > b > a$

Løsning: Siden det ikke er luftmotstand, er bevegelsen i vertikal og horisontal retning uavhengig av hverandre. Alle kulene har samme tyngdeakselerasjon g i vertikal retning (uavhengig av massen deres), så det eneste som betyr noe er starthøyden over bakken. Alle starter ved samme høyde bortsett fra kule e som starter ved 20 m i stedet for 10 m. Dermed bruker kule e lengst tid, og de andre kulene bruker samme tid på å treffe bakken.

Oppgave 4 Kuler som faller (II)

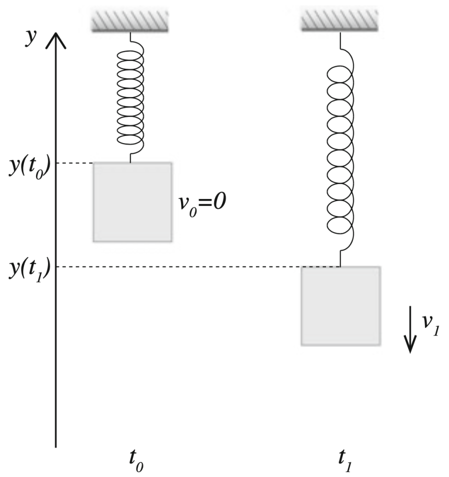


Vi har samme situasjon som i forrige oppgave med fem små stålkuler, og vi ser fortsatt bort fra luftmotstand. Rangér, fra lengst til kortest, den horisontale avstanden som kulene beveger seg før de treffer bakken.

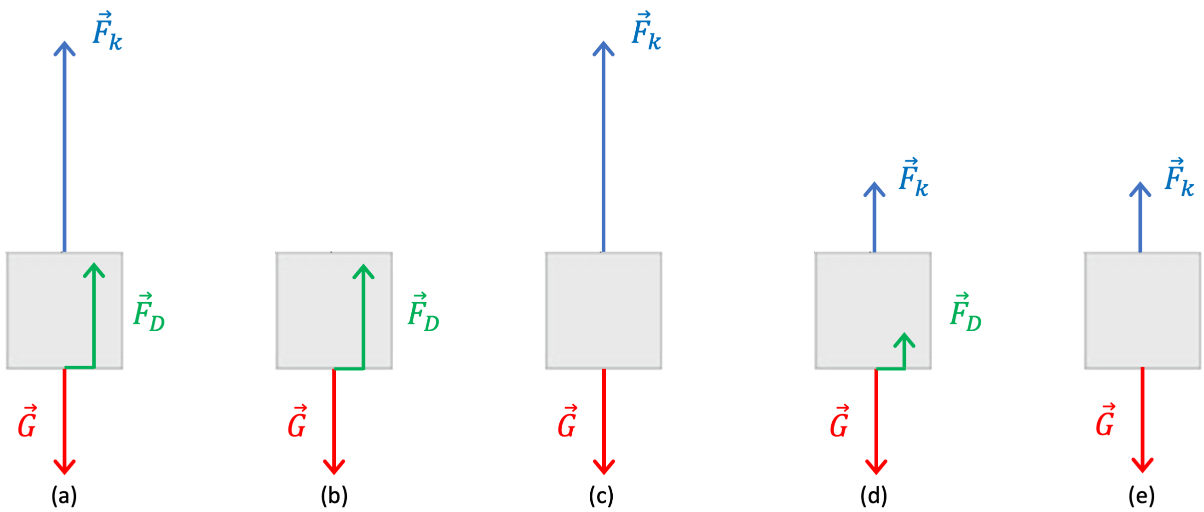
- $c > e > b = d > a$
- $e = d > a = b = c$
- $c > a > b > d > e$
- $a > b > c > d > e$
- $e > d > c > b > a$
- $e > c > b = d > a$

Løsning: Kule a har klart den korteste horisontale strekningen siden den faller rett ned. Videre så har kulene b og d samme initialhastighet og samme initialhøyde, så de vil ha den samme horisontale strekningen. Hva med kule c og e? Kule c har dobbelt så stor initialfart, mens kule e starter dobbelt så høyt. Men tiden kule e bruker på å treffe bakken er *ikke* dobbelt så lang som tiden kule c bruker! Vi vet at begge kulene har akselerasjon g i vertikal retning, mens initialhøyden er dobbelt så stor for kule e. Så tiden kule c bruker på falle er gitt ved $t_c = \sqrt{2gh_c}$, mens for kule e som starter i høyde $2h_c$ får vi $t_e = 2\sqrt{gh_c}$. Forholdet $t_e/t_c = \sqrt{2}$, ikke 2, og dermed betyr det at kule c kommer lenger enn kule e i horisontal retning før de treffer bakken.

Oppgave 5 En kloss i ei fjær (I)

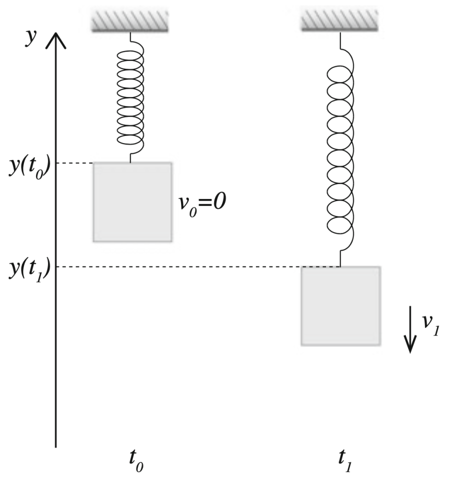


En kloss er festet i ei fjær som igjen er festet i taket, se figur. Først henger klossen i ro ved høyden $y(t_0) = y_0$, som tilsvarer likevektslengden til fjæra. Så drar vi klossen ned og slipper den, slik at den begynner å bevege seg opp og ned. Det er luft i rommet som klossen og fjæra befinner seg. Hvilken av figurene (a)-(e) representerer best frilegemediagrammet til klossen når den er i posisjon $y(t_1) = y_1$, gitt at den ved denne høyden har konstant fart v_1 og hastighet i retning nedover? I figurene er $\vec{G}$ tyngdekraft, $\vec{F}_k$ fjærkraft, og $\vec{F}_D$ er luftmotstand.



Løsning: Siden vi har fått oppgitt at klossen i denne høyden og ved dette tidspunktet har konstant fart, må summen av kreftene her være lik null. Vi har tyngdekraft som virker nedover, og fjærkraft og luftmotstand som virker oppover. Summen av disse tre kreftene blir da null, og figur (d) representerer dette best.

Oppgave 6   En kloss i ei fjær (II)



Vi har samme situasjon som i forrige oppgave, med en kloss med masse m som er festet til ei fjær, og fjæra er igjen festet i taket. Vi ser nå bort fra luftmotstand, og for enkelhets skyld definerer vi også $y(t_0) = y_0 = 0$ m, som er likevektslengden til fjæra. Fjæra har en fjærkonstant k og g er tyngdeakselerasjonen. Differensialligningen som beskriver klossens bevegelse er gitt ved

- $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}y$
- $\frac{d^2y}{dt^2} = g + \frac{k}{m}y$
- $\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \frac{k}{m}y$
- $\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ky$
- $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - y$

Løsning: Siden vi nå ser bort fra luftmotstand har vi kun to krefter, nemlig tyngdekraft $\vec{G}$ og fjærkraft $\vec{F}_k$. Vi har fått oppgitt at fjæras likevektslengde er satt til 0m, så da får vi med Hookes lov (med positiv y-retning oppover som i figuren):

$$F_k = -ky.$$

Vi sjekker fortegn: dersom vi har negative verdier for y, blir fjærkrafta positiv (trekker opp mot taket). Om vi har positive verdier for y, så er fjæra komprimert, og fjærkrafta peker nå bort fra taket og ned mot gulvet. Fra Newtons 2. lov på klossen får vi da:

$$\sum F_{ext} = -mg - ky = ma \Rightarrow a = -g - \frac{k}{m}y.$$

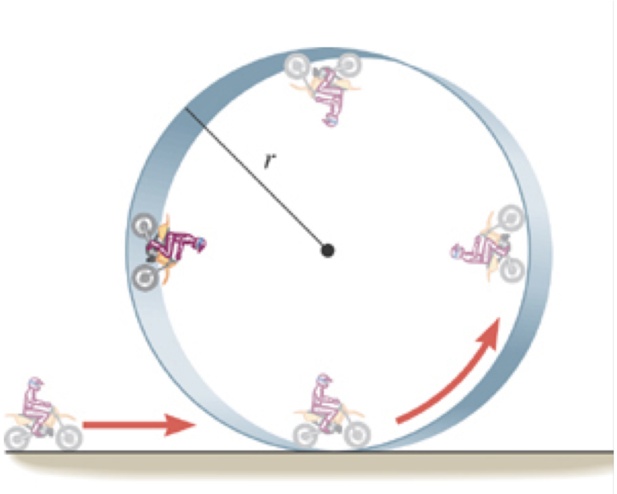
Akselerasjonen a er det samme som endring i hastighet per tidsintervall, og (i grensen for veldig små tidsintervall) gitt ved den dobbeltderiverte av posisjon med hensyn på tid:

$$a = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Dermed er det følgende svaralternativet riktig:

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}y.$$

Oppgave 7 Motorsyklisten



Som stunt-motorsykkelfører skal du kjøre i en vertikal loop med radius r. Den totale massen til motorsykkelen og deg er m. Farten v du må ha på toppen av loopen for ikke å falle ned er

- $v > \sqrt{gr}$
- $v > \sqrt{2gr}$
- $v > \sqrt{mgr}$
- $v > mg/r$
- $v > \sqrt{\frac{g}{r}}$

Løsning: På toppen av loopen virker to krefter: normalkraft fra loopen og tyngdekraft; begge peker nedover, rett inn mot sentrum av sirkelen. Det er samme retning som sentripetalakselerasjonen peker. Newtons 2. lov i radiell retning gir da (med positiv retning oppover):

$$-N - mg = -m\frac{v^2}{r}.$$

Betingelsen for at motorsykkelen og du ikke faller ned, er at normalkraften (kontaktkraften med underlaget) aldri må bli null. Hvis den er null, så vil du falle ned, da er

$$g = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = gr.$$

Vi bruker denne betingelsen og får:

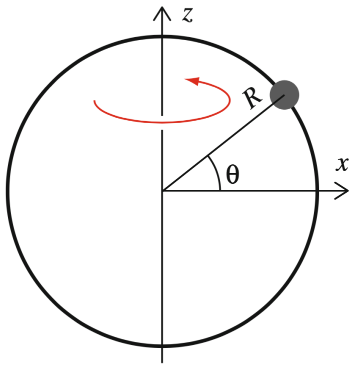
$$v^2 > gr \Rightarrow v > \sqrt{gr}$$

for at du ikke skal falle ned.

Oppgave 8 En treperle på en ring (I)

En liten treperle er tredd innpå en ring av ståltråd med radius R, se figur. Ringen roterer n ganger om z-aksen per minutt. Perlen sitter fast på ringen i en posisjon gitt ved vinkelen θ. Farten til perlen som funksjon av vinkelen θ er gitt ved

- $v = \frac{2\pi n}{60\text{s}} R\cos\theta$
- $v = \frac{2\pi n}{60\text{s}} R$
- $v = 2\pi n R \sin\theta$
- $v = \frac{60\text{s}}{2\pi n} R\cos\theta$
- $v = \frac{2\pi n}{R\cdot 60\text{s}} \cos\theta$



Løsning: For en sirkelbevegelse så er farten gitt ved $v = \omega r$ hvor r er avstanden fra rotasjonsaksen. Her er perlen festet litt oppe på stålringen, så avstanden fra rotasjonsaksen er ikke radien R, men $R\cos\theta$ for perlen. Da får vi at

$$v = \omega R\cos\theta.$$

Så finner vi vinkelfarten ω. Det er oppgitt at ringen (og dermed perlen) roterer n ganger per minutt, da blir

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi n}{60\text{s}}$$

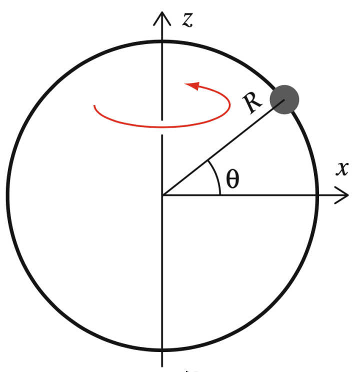
hvor $T = 60\text{s}/n$ er perioden. Da får vi tilslutt at

$$v = \frac{2\pi n}{60\text{s}} R\cos\theta.$$

Oppgave 9 En treperle på en ring (II)

Vi har samme situasjon som i forrige oppgave, hvor en liten treperle er tredd innpå en ring av ståltråd med radius R som vist i figuren. Ringen roterer n ganger om z-aksen per minutt og perlen er festet i en posisjon gitt ved vinkelen θ. Akselerasjonen til perlen som funksjon av vinkelen θ er gitt ved

- $a = \left[\frac{2\pi n}{60\text{s}}\right]^2 R\cos\theta$
- $a = \left[\frac{2\pi n}{60\text{s}}\right]^2 R\cos^2\theta$
- $a = \left[\frac{2\pi n}{60\text{s}}\right]^2 \frac{\cos^2\theta}{R}$
- $a = \frac{60\text{s}}{2\pi n} R^2\cos\theta$
- $a = \left[\frac{2\pi n}{R\cdot 60\text{s}}\right]^2 \cos\theta$



Løsning: Vi vet at dette er en sirkelbevegelse, og dermed har vi sentripetalakselerasjon:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

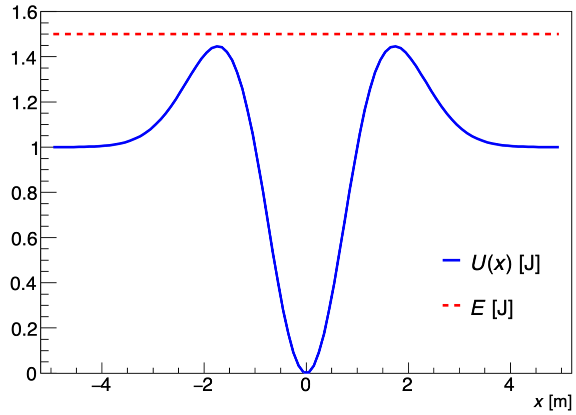
Vi setter inn farten fra forrige oppgave og avstanden fra rotasjonsaksen $r = R\cos\theta$ og får:

$$a = \frac{\left[\frac{2\pi n}{60\text{s}} R\cos\theta\right]^2}{R\cos\theta} = \left[\frac{2\pi n}{60\text{s}}\right]^2 R\cos\theta.$$

Oppgave 10 Partikkel i et potensial

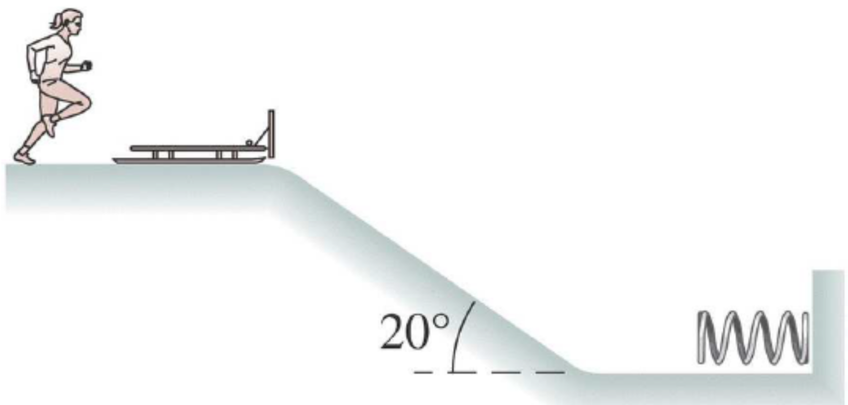
En partikkel befinner seg i et potensial som vist i figuren, og har total mekanisk energi angitt ved den stiplede linja. Ved hvilken posisjon har partikkelen maksimal kinetiske energi?

- $x = 0$ m.
- $x \approx -1.7$ m og $x \approx 1.7$ m.
- $x \approx -4$ m og $x \approx 4$ m.
- Partikkelen har den samme kinetiske energien for alle x.



Løsning: Den maksimale kinetiske energien har vi når den potensielle energien er minst, altså ved $x = 0$ m.

Oppgave 11 Ny øvelse til vinter-OL



Laura Palmer trener på en ny øvelse som muligens kan bli tatt med i de Olympiske vinterleker. Hun har masse $m_L = 66.0$ kg, hun løper så fort hun kan og så hopper hun oppi en kjelke med masse $m_K = 23.0$ kg som i starten er i ro på toppen av en bakke (se figur). Laura og kjelken får nå en fart på $v_0 = 10.2$ m/s på bakketoppen, og de sklir så ned en isete rampe, som er 65.0 m lang og som danner en vinkel på 20.0° med horisontalen. Ved bunnen av rampen er det montert en stor fjær som følger Hookes lov, med en fjærkonstant på $k = 2400$ N/m. Øvelsen går ut på at den utøveren som greier å komprimere fjæra mest, vinner øvelsen. Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand. Hvor mange meter vil Laura og kjelken greie å komprimere fjæra?

- 4.48 m.
- 1.03 m.
- 1.90 m.
- 2.53 m.
- 10.7 m.

Løsning: Her bruker vi energibevaring. Vi kan gjøre det på flere måter, det enkleste er å si at mekanisk energi i starten (kinetisk energi pluss potensiell energi pga. tyngdefeltet, E_0) er lik mekanisk energi når fjæra er maksimalt komprimert (kun potensiell energi i fjæra, E_1):

$$E_0 = E_1$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{k}\left(v_0^2 + 2gh\right)} = 4.48\text{m}.$$

I løsningsforslaget under har vi gitt litt mer detaljer og delt problemet opp i to: del 1 er fra toppen av rampen og til bunnen av rampen, og del 2 fra bunnen av rampen til fjæra er maksimalt komprimert.

I starten er kinetisk energi

$$K_0 = \frac{1}{2}(m_L + m_K)v_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

hvor vi har at massen til Laura og kjelken tilsammen er $m = m_L + m_K = 89$ kg. Potensiell energi i starten er

$$U_0 = mgh = mgL\sin\theta$$

hvor L er lengden på rampen, $\theta = 20°$ er vinkelen og h er høyden til rampen. Når Laura og kjelken har sklidd ned er det ingen potensiell energi, kun kinetisk energi:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

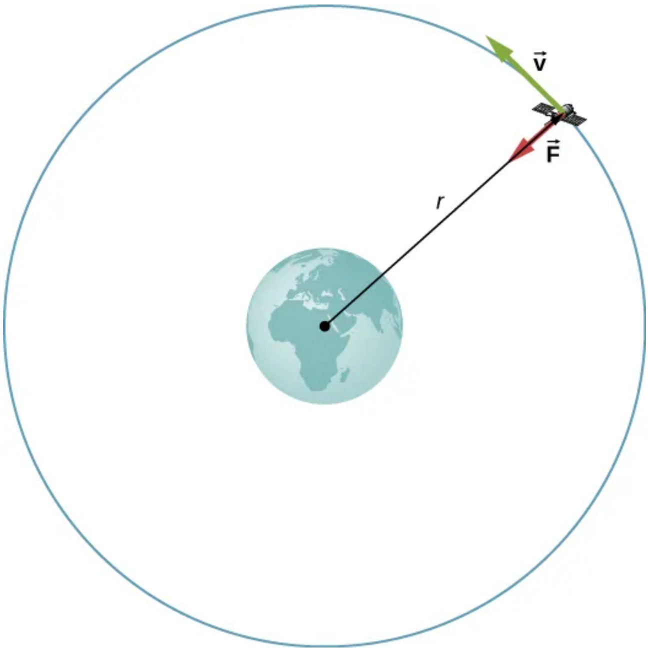
Vi setter mekanisk energi før lik mekanisk energi etter og får:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL\sin\theta \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gL\sin\theta} = 23.24\text{m/s}.$$

Så skal vi finne ut hvor mye Laura og kjelken vil komprimere fjæra. Når fjæra er maksimalt komprimert, har Laura og kjelken ikke noen fart lenger (all mekanisk energi er nå overført i den potensielle energien til fjæra som er maksimalt sammentrykket). Den potensielle energien til ei fjær er gitt på formelarket, $U_k(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Vi får da (hvor vi legger $x = 0$ m ved likevektslengden til fjæra):

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_1 = 4.476\text{m} = 4.48\text{m}.$$

Oppgave 12 En satellitt i bane rundt Jorda



En satellitt med masse m går i en sirkelbane med radius r rundt Jorda som har masse M, se figur. Vi bruker G for gravitasjonskonstanten som i formelarket.

Farten til satellitten er

- $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$
- $v = \sqrt{\frac{GMm}{r^2}}$
- $v = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$
- $v = \frac{Gm}{r}$
- $v = \frac{GMm}{r^2}$

Løsning: Satellitten har en sentripetalakselerasjon pga. tyngdekraften fra Jorda. Tyngdekraften er den eneste kraften som virker på satelllitten (vi ser bort fra påvirkning fra sola og andre planeter), og vi får fra Newtons 2. lov:

$$G\frac{Mm}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r}$$

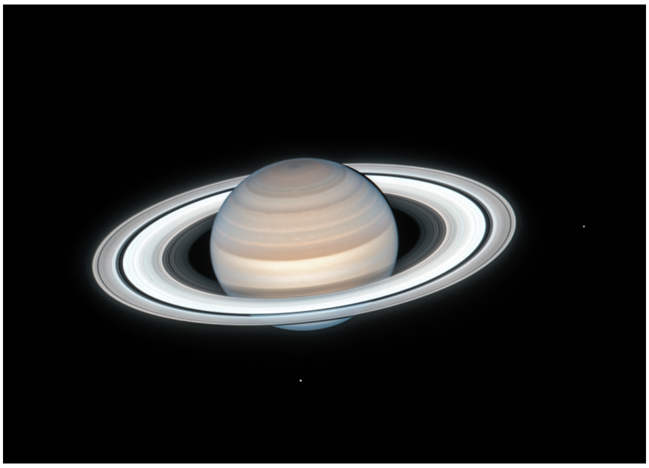
hvor G her er gravitasjonskonstanten (som i formelarket). Vi løser for v og får:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Oppgave 13 Jorda og Saturn

Planeten Saturn har 100 ganger så stor masse som Jorda, og Saturns avstand til sola er 10 ganger større enn Jordas. Sammenliknet med Jordas akselerasjon i dens bane om sola, er akselerasjonen til Saturn i sin bane om sola:

- 10 ganger større enn Jordas akselerasjon.
- Den samme som Jordas akselerasjon.
- 10 ganger mindre enn Jordas akselerasjon.
- 100 ganger mindre enn Jordas akselerasjon.



Løsning: Størrelsen på tyngdekraften som virker på en planet med masse m i en avstand r fra en stjerne med masse M er gitt ved Newtons gravitasjonslov:

$$F_G = G\frac{mM}{r^2}$$

der G er gravitasjonskonstanten. Når planeten går i bane rundt sola, er det kun tyngdekraft som virker og vi har av Newtons 2. lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

Vi får at størrelsen på akselerasjonen er gitt ved

$$F_G = G\frac{mM}{r^2} = ma \Rightarrow a = G\frac{M}{r^2}$$

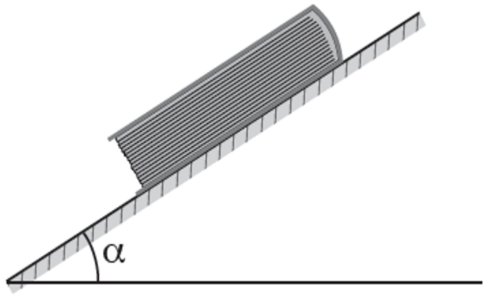
Nå kan vi sammenligne akselerasjonen til Jorda med avstand r_{Jord} med akselerasjonen til Saturn, hvor $r_{\text{Saturn}} = 10r_{\text{Jord}}$:

$$\frac{a_{\text{Saturn}}}{a_{\text{Jord}}} = \frac{GM}{r_{\text{Saturn}}^2}\frac{r_{\text{Jord}}^2}{GM} = \frac{r_{\text{Jord}}^2}{(10r_{\text{Jord}})^2} = \frac{1}{100}.$$

Så akselerasjonen til Saturn er 100 ganger mindre enn akselerasjonen til Jorda.

Oppgave 14 En bok i ro

En bok med masse m ligger i ro på et skråplan. Den statiske friksjonskoeffisienten er μ_s. Hva er den største helningsvinkelen $\alpha_{\max}$ skråplanet kan ha for at boka fortsatt skal være i ro og ikke begynner å gli?



- $\alpha_{\max} = \arctan(\mu_s)$
- $\alpha_{\max} = \arcsin(\mu_s)$
- $\alpha_{\max} = \arcsin(mg\mu_s)$
- $\alpha_{\max} = mg \arccos(\mu_s)$

Løsning: Kreftene som virker på boka er tyngdekraft, normalkraft fra skråplanet, og statisk friksjon mellom skråplanet og boka. Siden boka skal være i ro, må summen av kreftene som virker på boka være null etter Newtons 2. lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{f}_s = m\vec{a} = \vec{0}.$$

Vi dekomponerer tyngdekraften i en komponent normalt på planet, $G_\perp = mg\cos(\alpha)$, og en parallelt med planet, $G_\parallel = mg\sin(\alpha)$. Normalt på planet får vi (med positiv retning opp fra planet):

$$N - G_\perp = N - mg\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N = mg\cos(\alpha)$$

Langs planet får vi (positiv retning opp langs planet):

$$f_s - G_\parallel = f_s - mg\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow f_s = mg\sin(\alpha).$$

Betingelsen for at boka ikke skal skli, er at friksjonen f_s må være mindre enn eller lik den maksimale verdien $f_{s,max} = \mu_s N$. Vi får:

$$f_s = f_{s,max} = \mu_s N$$

$$mg\sin(\alpha_{\max}) = \mu_s mg\cos(\alpha_{\max})$$

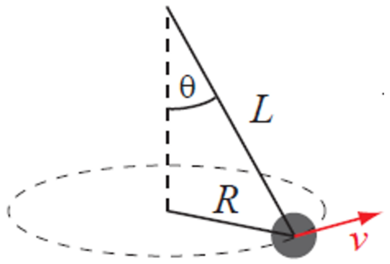
$$\tan(\alpha_{\max}) = \mu_s \Rightarrow \alpha_{\max} = \arctan(\mu_s).$$

Oppgave 15 En kjeglependel

En kjeglependel (konisk pendel) hvor snoren danner en vinkel θ med vertikalen beveger seg med konstant fart v i en sirkelbane som vist i figuren. Pendel-loddet har masse m, lengden på snoren er L og radien i sirkelbanen er R. Vi ser bort fra luftmotstand. Vinkelfarten ω til kjeglependelen er

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos(\theta)}}$

- $\omega = \sqrt{\frac{2gL}{\cos(\theta)}}$
- $\omega = \sqrt{2gL\cos(\theta)}$
- $\omega = gL\sqrt{\cos(\theta)}$



Løsning: Uten luftmotstand har vi to krefter som virker på pendelen: snordrag $\vec{T}$ og tyngdekraft $\vec{G}$. Newtons 2. lov i vertikal retning:

$$T\cos(\theta) - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

Så ser på på kreftene i planet, her er det kun en komponent av snordraget siden vi ser bort fra luftmotstand, og denne komponenten gir pendelen sentripetalakselerasjonen den trenger for å holde seg på sirkelbanen::

$$T\sin(\theta) = ma = m\frac{v^2}{R}$$

Vi har at tangentialfarten for en sirkelbevegelse er gitt som $v = \omega R$, og vi setter inn og får for akselerasjonen:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = R\omega^2.$$

Radien R er lik $L\sin(\theta)$, og vi setter inn:

$$T\sin(\theta) = mL\sin(\theta)\omega^2$$

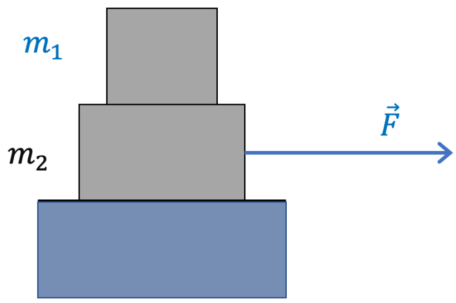
Setter inn for T som vi fant med N2L i vertikal retning, og får:

$$\frac{mg}{\cos(\theta)} = mL\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{g/(L\cos(\theta))}.$$

Oppgave 16 To bøker (I)

To bøker ligger oppå hverandre på et bord. Boka som ligger øverst har masse m_1, og boka som ligger nederst har masse m_2. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom bøkene er μ_1, og den statiske friksjonskoeffisienten mellom bordet og den nederste boka er μ_2. Du drar i den nederste boka med en kraft $\vec{F}$ i horisontal retning. For at du skal klare å dra begge bøkene slik at de glir langs bordet, må størrelsen på kraften være

- $F > \mu_2(m_1 + m_2)g$
- $F > \mu_2 m_2 g$
- $F > \mu_2 g/(m_1 + m_2)$
- $F > (m_1 + m_2)g/\mu_2$
- $F > (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g$



Løsning: Vi ser på begge bøkene som ett system. Kreftene som virker er tyngdekraft, normalkraft, og kraften vi trekker i den nedre boka med. Ingen bevegelse i vertikal retning gir, fra Newtons 2. lov:

$$\vec{G} + \vec{N} = \vec{0}$$

$$N = (m_1 + m_2)g$$

For at de to bøkene skal begynne å bevege seg langs bordet, må den maksimale, statiske friksjonskraften mellom systemet av de to bøkene og bordet overvinnes:

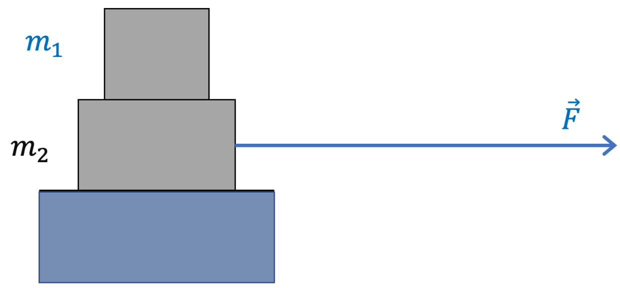
$$f_{s,max} = \mu_2 N = \mu_2(m_1 + m_2)g.$$

Derfor må $F > \mu_2(m_1 + m_2)g$ for at de to bøkene skal begynne å gli oppå bordet.

Oppgave 17 To bøker (II)

Vi har den samme situasjonen som i forrige oppgave, med de to bøkene som ligger på et bord. Du drar raskt i den nederste boka, igjen med en horisontal kraft $\vec{F}$. Hva må størrelsen på kraften være for at du skal dra den nederste boka ut under den øverste boka, slik at den øverste boka sklir av?

- $F > (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g$
- $F > \mu_1 m_1 g + \mu_2 m_2 g$
- $F > [\mu_1 m_1 + \mu_2(m_1 + m_2)]\, g$
- $F > \frac{\mu_1+\mu_2}{m_1+m_2} g$
- $F > [\mu_1 m_1 + \mu_2(m_1 + m_2)]\, /g$



Løsning: Nå må kraften overvinne både statisk friksjon mellom bordet og den nederste boka, og statisk friksjon mellom den øverste og den nederste boka, siden både den nederste og den øverste boka skal gli. Vi ser først på kreftene på den øverste boka. I vertikal retning har vi tyngdekraft $G_1 = m_1 g$ og normalkraft N_1 fra den nederste boka, og i horisontal retning har vi statisk friksjon $f_{s,1}$ mellom de to bøkene. Siden det ikke er noen bevegelse i vertikal retning får vi igjen fra Newtons 2. lov:

$$N_1 = m_1 g,$$

og den maksimale statiske friksjonen $f_{s,1}^{max}$:

$$f_{s,1}^{max} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g.$$

Dette betyr at den øverste boka kan få en maksimal akselerasjon

$$a_{\max} = f_{s,1}^{max}/m_1 = \mu_1 g$$

og fortsatt holde seg oppå den nederste boka uten å skli. Videre vet vi fra forrige oppgave at den maksimale, statiske friksjonen mellom den nederste boka og bordet er lik $f_{s,2}^{max} = \mu_2(m_1+m_2)g$. Nå ser vi igjen på systemet av de to bøkene sammen, og bruker Newtons 2. lov i horisontal retning for å finne akselerasjonen a til bøkene samlet. Summen av de *eksterne* kreftene i horisontal retning:

$$F - f_{s,2}^{max} = (m_1 + m_2)a$$

Så har vi en betingelse, nemlig at den øverste boka må ha $a \leq a_{\max} = \mu_1 g$ for å forbli oppå den nederste boka. Vi setter $a = a_{\max}$ og får:

$$F - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a_{\max} = (m_1 + m_2)\mu_1 g$$

Vi løser for kraften F og får:

$$F = (m_1 + m_2)\mu_2 g + (m_1 + m_2)\mu_1 g = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g.$$

For at den nederste boka skal begynne å gli, og den øverste boka skal gli av den øverste boka må kraften du trekker med i horisontal retning være:

$$F > (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g.$$

Oppgave 18 En regndråpe faller gjennom lufta

En regndråpe faller loddrett nedover i lufta. Vi definerer positiv y-retning oppover, og luftmotstandskraften er gitt ved $F_D = -k_v v(t)$. Terminalfarten v_T (dvs. størrelsen på terminalhastigheten) til dråpen er gitt ved

- $v_T = \frac{mg}{k_v}$
- $v_T = \frac{k_v}{mg}$
- $v_T = \sqrt{\frac{mg}{k_v}}$
- $v_T = \frac{mg}{k_v^2}$

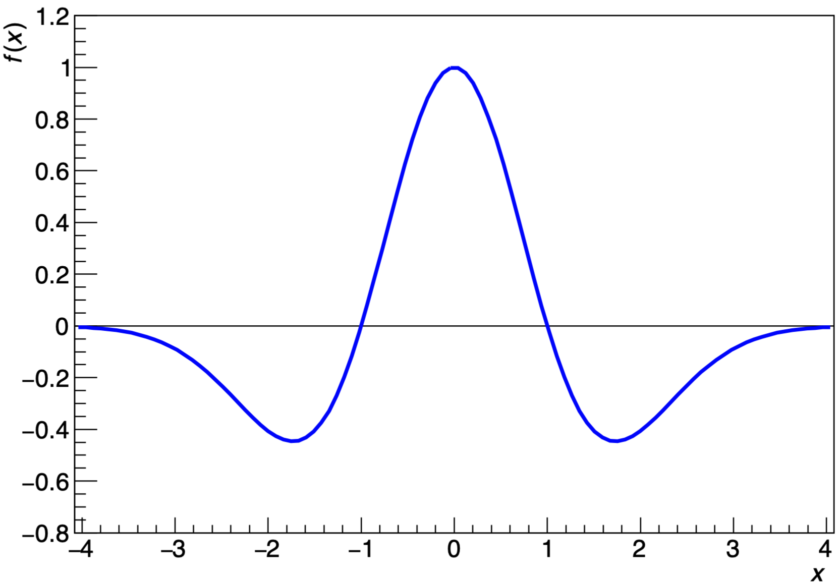
Løsning: Terminalfart oppnås når akselerasjonen er null. Etter Newtons 2. lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_D + \vec{G} = -mg\hat{\mathbf{j}} - k_v(v(t)\hat{\mathbf{j}} = ma\hat{\mathbf{j}}$$

Vi får:

$$a = -g - \frac{k_v}{m}v = 0 \Rightarrow v_T = -\frac{mg}{k_v}, |v_T| = \frac{mg}{k_v}$$

Oppgave 19 Taylor-rekkeutvikling av en "Mexican Hat"



Uttrykket for "Mexican Hat"-funksjonen er gitt ved

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-x^2/2},$$

se også figur av funksjonen. Taylor-polynomet av grad 2 om $x = 0$ til dette potensialet er

- $1 - \frac{3}{2}x^2$
- $1 + \frac{3}{2}x^2$
- $1 + x$
- $x + x^2 + x^4$
- $1 + x + \frac{4}{5}x^2$

Løsning: Taylorrekka av grad n til en funksjon $f(x)$ om $x = a$ er gitt ved (fra formelarket):

$$T_n(f;a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)\frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x-a)^2\frac{df^2(x=a)}{dx^2} + ... + \frac{1}{n!}(x-a)^n\frac{df^n(x=a)}{dx^n}.$$

Å bruke denne formelen direkte krever ofte endel regning, men leder alltid fram. I mange tilfelle kan en finne svaret raskere ved å bruke kjente rekker, vi viser hvordan man kan gjøre det for denne funksjonen til slutt, men først rett-fram"måten.

Vi finner først den førstederiverte av funksjonen $f(x)$ ved å bruke produktregelen:

$$\frac{df}{dx} = -2xe^{-x^2/2} + \left(1 - x^2\right)\left(-xe^{-x^2/2}\right).$$

Så finner vi den annenderiverte, her bruker vi produktregelen flere ganger. Vi deriverer det første leddet i uttrykket over:

$$\frac{d}{dx}\left(-2xe^{-x^2/2}\right) = -2e^{-x^2/2} + 2x^2e^{-x^2/2}.$$

Så ser vi det siste leddet, $(-xe^{-x^2/2})$, her bruker vi produktregelen for å finne den deriverte og får:

$$\frac{d}{dx}\left(-xe^{-x^2/2}\right) = -e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2}.$$

Nå har vi det vi trenger og kan bruke produktregelen på uttrykket $\left(1 - x^2\right)\left(-xe^{-x^2/2}\right)$, som blir:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\left(-xe^{-x^2/2}\right)\right] = 2x^2e^{-x^2/2} + (1 - x^2)(-e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2}).$$

og vi får tilslutt:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-2xe^{-x^2/2} + \left(1 - x^2\right)\left(-xe^{-x^2/2}\right)\right) = -2e^{-x^2/2} + 4x^2e^{-x^2/2} + (1-x^2)(-e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2}).$$

Så skal vi finne Taylorpolynomet av grad 2 om $x = 0$. Vi ser at vi får:

$$f(0) = 1,$$

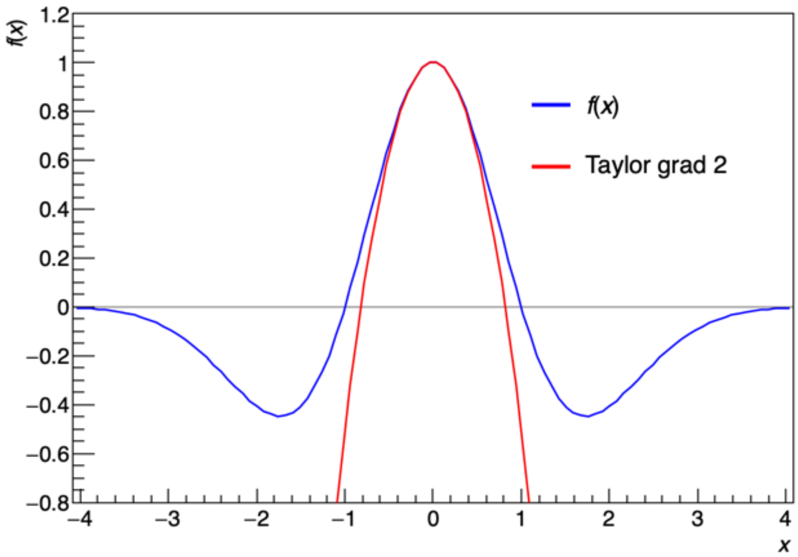
$$\frac{df(0)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2f(0)}{dx^2} = -3,$$

og dermed får vi:

$$T_2(f; a = 0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \cdot (-3) = 1 - \frac{3}{2}x^2,$$

som beskriver funksjonen fint rundt $x = 0$, se figur.



Vi kan finne svaret enklere hvis vi bruker rekka for eksponentialfunksjonen

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots .$$

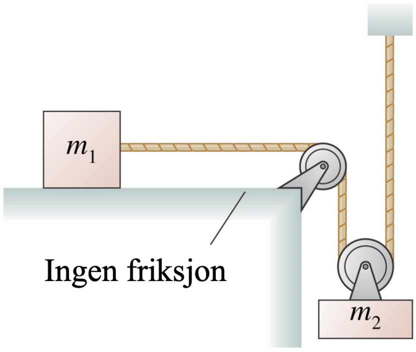
Denne står i formelsamlinga og er også lett å vise siden det er så lett å derivere e^x. Fra den får vi at

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots .$$

Dermed er

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-x^2/2} = \left(1 - x^2\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \cdots .$$

Oppgave 20   Klosser og trinser



En kloss med masse m_1 ligger oppå et friksjonsfritt bord som vist i figuren. Det er festet et tau til klossen, og tauet går via en trinse og til en ny trinse hvor det henger en kloss med masse m_2 på undersiden. Enden på tauet er festet i taket . Vi ser bort fra luftmotstand, og antar at tauet og trinsene er masseløse, og at tauet ikke strekker seg. Systemet slippes løs, og klossen med masse m_1 beveger seg mot høyre mens klossen med masse m_2 beveger seg nedover. Akselerasjonen som klossen med masse m_1 får er gitt ved

- $a_1 = \frac{m_2 g}{2m_1 + \frac{m_2}{2}}$
- $a_1 = \frac{2m_2 g}{2m_1 + m_2}$
- $a_1 = \frac{m_2}{(2m_1 + m_2)g}$
- $a_1 = \frac{4m_2}{(2m_1 + m_2)g}$
- $a_1 = \frac{m_2 g}{2m_1 + m_2}$

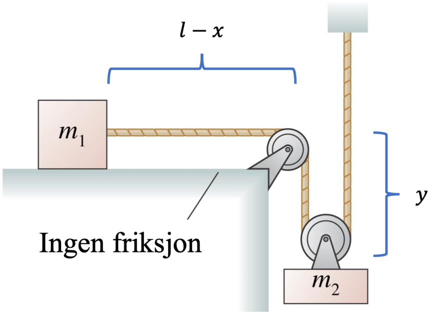
Løsning: Her må vi bruke Newtons 2. lov på klossene, og bruke at tauet ikke strekker seg men har samme konstante lengde gjennom hele bevegelsen. Siden tauet er masseløst, er det samme snordrag T overalt i tauet. N2L på kloss 1 i horisontal retning gir:

$$T = m_1 a_1.$$

N2L på kloss 2 i vertikal retning gir (velger positiv retning i bevegelsesretning):

$$m_2 g - 2T = m_2 a_2.$$

Her er det viktig å få med at vi har $2T$ oppover, dette ser vi fra trinsa som er festet i kloss 2: det er ett snordrag på venstre side og ett på høyre side som tilsammen gir $2T$. Hvordan finner vi så sammenhengen mellom de to akselerasjonene a_1 og a_2? Her må vi bruke betingelsen at lengden til tauet er konstant, dvs. at den lengden kloss 1 flytter seg i horisontal retning, tilsvarer den lengden som kloss 2 flytter seg i vertikal retning. Vi kaller den totale (og konstante) lengden til tauet for D. Kloss 1 starter i en lengde l, og denne blir så mindre og mindre ettersom klossen beveger seg, så lengden til tauet på bordet er $l - x$. Kloss 2 henger i en høyde y, taulengden blir da $2y$ (tau på begge sider av trinsa som er festet i kloss 2), se figur.



I tillegg har vi noen konstanter: lengden av tauet over den første trinsa, lengden av tauet under den andre trinsa, og høyden fra taket, men det er kun posisjonen $l - x$ til kloss 1 og høyden y til kloss 2 som forandrer seg med tiden (trinsene er like store og tauet er alltid festet i samme høyde). Vi får:

$$D = (l - x) + 2y + \text{høyde opp til taket} + \text{buelengde over trinse 1} + \text{buelengde over trinse 2}.$$

Vi deriverer med hensyn på tid og får:

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = 2v_y \Rightarrow a_x = 2a_y,$$

dvs.

$$a_1 = 2a_2.$$

Da har vi alt vi trenger for å regne ut akselerasjonen a_1 til kloss 1:

$$m_2 g - 2m_1 a_1 = m_2 \left(\frac{a_1}{2}\right) \Rightarrow a_1 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2} = \frac{m_2 g}{2m_1 + \frac{m_2}{2}}.$$

Eksamenssett slutt.