

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk

Eksamensdag: Onsdag 11. juni 2025

Tid for eksamen: Kl. 09.00–13.00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 4 sider

Tillatte hjelpemidler:

- Rottmann: 'Matematisk formelsamling'
- Øgrim og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'
- Angell og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'
- Godkjent kalkulator
- Ett A4 ark med egne notater (skrevet for hånd eller digitalt, begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Maksimalt antall poeng totalt er 100. Maksimal poengsum man kan få per deloppgave står skrevet etter hver deloppgave.

Oppgave 1 Bruddet med klassisk fysikk

- a) Tegn en skisse av Compton-eksperimentet. På hvilken måte viser dette eksperimentet både lysets bølge- og partikkelegenskaper? [5p]
- b) Forklar kort hvilken fysisk betydning vi tillegger en bølgefunksjon $\Psi(x, t)$ i kvantemekanikken. Hvordan bryter konseptet om bølgefunksjonen med forventninger fra klassisk fysikk? [5p]
- c) Skriv ned den tidsavhengige Schrödinger-ligningen for en partikkel i én dimensjon med potensiell energi $V(x, t)$. Vis at løsninger på formen

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

leder til den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen.

Hva kalles slike løsninger, og hvilket krav må vi stille til $V(x, t)$ for at de skal gjelde? [5p]

- d) Forklar hva Zeeman-effekten er, og diskuter kort forskjellen mellom denne effekten og den effekten som får sølvatomer til å bøyes av i Stern-Gerlach-eksperimentet. [5p]

Oppgave 2 Harmonisk oscillator

Et elektron kan fanges i en *silisiumvakans*, et område i en silisiumkrystall der det mangler et atom. Nær bunnpunktet til det effektive potensialet som elektronet da opplever, kan potensialet tilnærmes som en harmonisk oscillator. Selv om Si-vakansen egentlig oppfører seg som en tredimensjonal oscillator, skal vi i denne oppgaven holde oss til én dimensjon.

- a) Tegn en skisse som viser potensialet $V(x)$ for en éndimensjonal harmonisk oscillator. Skissér også karakteristiske trekk ved bølgefunksjonene for grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden. [5p]
- b) Bølgefunksjonen for grunntilstanden til et elektron fanget i en éndimensjonal Si-vakans er gitt ved

$$\psi_0(x) = A \exp \left[-\frac{1}{2}a^2x^2 \right],$$

der A og a er konstanter.

Sett opp energi-egenverdiligningen for denne bølgefunksjonen og bestem potensialet $V(x)$ som gir $\psi_0(x)$ som løsning. Finn også grunntilstandsenergien E_0 . Hva er sammenhengen mellom konstanten a og krumningen $V''(0)$ i bunnpunktet til potensialet? [5p]

- c) Normering av grunntilstanden $\psi_0(x)$ gir $A = \sqrt[4]{a^2/\pi}$. Bruk dette til å beregne $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$ for grunntilstanden. Finn også $\sigma_x \sigma_p$, og kommenter resultatet. [10p]

- d) Anta at elektronet ved tiden $t = 0$ er i tilstanden gitt ved

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} B \sin^2 [\pi x/b] & \text{for } x \in [-b, b], \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Sett opp uttrykket for sannsynligheten for å måle energien E_0 ved tiden $t = 0$. [5p]

Hint: Du trenger ikke integrere noe, bare sette opp uttrykket.

Oppgave 3 Hydrogenatomet

Energi-egenverdligningen for et elektron i et hydrogenatom er

$$\hat{H}_0 \psi_{nlm_l} = -\frac{E_0}{n^2} \psi_{nlm_l},$$

der E_0 er en konstant. Vi ser i denne oppgaven bort fra elektronets egenspin.

- a) Hvilke verdier kan kvantetallene n , l og m_l ha?
Hva er deres fysiske betydning? [5p]

- b) Anta at elektronet er i superposisjonstilstanden

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{100}(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{311}(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_3 t}.$$

Hva kan du si om resultatet av en energimåling?

Hva er $\langle H \rangle$ og σ_H for denne superposisjonstilstanden? [5p]

- c) Bølgefunksjonen for s -tilstanden med $n = 2$ (altså $2s$ -orbitalen) er gitt ved

$$\psi_{200} = \sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \exp\left[-\frac{\rho}{2}\right],$$

der $\rho = r/a_0$ og a_0 er Bohr-radien. Vis at denne bølgefunksjonen er normert. Finn både forventningsverdien for radien $\langle r \rangle$ og den radien som elektronet med størst sannsynlighet befinner seg i. Forklar kort hvorfor det er forskjell på disse to radiene. [10p]

Hint: Det kan være nyttig å bruke at

$$\int_0^\infty \rho^k e^{-\rho} d\rho = k! \quad (1)$$

for alle positive heltall k .

- d) Anta nå at Hamilton-operatoren har et ekstra ledd

$$\hat{H}_1 = \frac{E_0}{16\hbar^2} (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2).$$

Finn egenverdiene for $\hat{H}_0 + \hat{H}_1$. Skissér energinivåene med $n = 1$ og $n = 2$ før og etter at $\hat{H}_1$ -leddet er innført. Hvilken degenerasjon har disse nivåene i de to tilfellene? [10p]

Oppgave 4 Flerpartikkel-systemer

- a) Vi betegner spinn-egentilstandene for partikler med spinn-1/2 (det vil si spinn-kvantetall $s = \frac{1}{2}$) med χ_+ og χ_- , altså

$$\begin{aligned}\hat{S}_z \chi_+ &= +\frac{\hbar}{2} \chi_+, \\ \hat{S}_z \chi_- &= -\frac{\hbar}{2} \chi_-.\end{aligned}$$

Skriv ned topartikkel-tilstandene for *to* slike spinn med totalt magnetisk kvantetall $m_s = 0$. Hva kalles disse tilstandene, og hvilken observabel kan du måle for å skille dem? [5p]

Hint: Dette vil si topartikkel-egentilstandene for $\hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}$ med egenverdi $\hbar m_s = 0$.

- b) Vis at en antisymmetrisk topartikkel-bølgefunksjon kan skrives på formen

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \psi_a(\vec{r}_1) & \psi_a(\vec{r}_2) \\ \psi_b(\vec{r}_1) & \psi_b(\vec{r}_2) \end{vmatrix},$$

der de vertikale strekene betegner determinanten til 2×2 -matrisen innenfor. [5p]

- c) Heliumatomet (He) og hydrogenmolekylet (H_2) er to eksempler på topartikkel-systemer i naturen, dersom vi anser kjernene som stasjonære punktladninger som kun setter opp potensialet elektronene beveger seg i.

Forklar kort hvorfor de to bindingselektronene i H_2 -molekylet må være i en spinn-singlett-tilstand.

Hva er mest energetisk fordelaktig for de to elektronene i den første eksiterte tilstanden i He-atomet — en spinn-singlett-tilstand eller en spinn-triplett-tilstand? Diskuter kort. [10p]

- d) Tegn opp elektronkonfigurasjonen til et nitrogenatom i grunntilstanden. Forklar kort resonnementet ditt for fordelingen av elektroner i ulike orbitaler. [5p]

Hint: Nitrogen har atomnummer 7.