

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1050 — Matematikk for anvendelser 1

Eksamensdag: Mandag 2. desember 2024

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Formelark

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1 Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = x^2y - 2xy + \frac{1}{2}y^2$$

definert over hele $\mathbb{R}^2$.

- a) Finn de kritiske punktene til f .
- b) Avgjør om de kritiske punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.
- c) Finn det bestemte integralet av funksjonen f over rektangelet

$$[0, 1] \times [0, 2]$$

OPPGAVE 2 En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (2 - \cos t, -1 + \sin t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

- a) Finn buelengden av kurven C .
- b) Finn integralet av funksjonen $f(x, y) = xy - x + y$ langs kurven C .

OPPGAVE 3 Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 - 2, 2xy - 2)$.

- a) Vis at feltet $\mathbf{F}$ er konservativt.
- b) Finn en potensialfunksjon f for $\mathbf{F}$ som oppfyller $f(1, 1) = 0$.

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 4

- a) En modell av et dynamisk system er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 2y\end{aligned}$$

Forklar hva slags natur likevektspunktet $(0, 0)$ har og beskriv hvordan typiske løsningskurver for modellen ser ut.

- b) Vis at den parametriserte kurven

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos t + \sin t \\ y(t) &= \cos t + 3 \sin t\end{aligned}$$

er en løsning for modellen som oppfyller $x(0) = y(0) = 1$.

- c) Vis at nivåkurvene til funksjonen $g(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2$ utgjør løsningskurver for modellen. (Hint: Vis at gradienten til g står normalt på vektorfeltet som modellen definerer.)

SLUTT.

FORMELSAMLING FOR MAT 1050, HØST 2024

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
 $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
 $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln(x^a) = a \ln x$

Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$, $x > 0$
 $\int e^x dx = e^x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$
 $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$, $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

Generelle: $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
 $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$
 $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

Kompleks konjugert: $\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta}$

Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

(Fortsettes på side 4.)

Funksjoner av flere variable

Nivåkurver: $f(\mathbf{x}) = C$

Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$

Annenderiverttest: $H(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2$.

i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.

ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.

iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Tangent: $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$

Buelengde: $B = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + \dots + x'_n(t)^2} dt$

Linjeintegral av funksjon: $\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + \dots + x'_n(t)^2} dt$

Virvling for plant vektorfelt: $\mathbf{F} = (P, Q): \text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Nødvendig betingelse for konservativt felt: $\text{curl}(\mathbf{F}) = 0$.

Multiple integraler

Polarkoordinater: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,

$$\iint_{D(x,y)} f dx dy = \iint_{D(r,\theta)} f r dr d\theta$$

Areal og tyngdepunkt: $A = \iint_D 1 dx dy$

$$\bar{x}A = \iint_D x dx dy \quad \bar{y}A = \iint_D y dx dy$$

Dynamiske systemer

System: $x'(t) = ax + by, y'(t) = cx + dy$

Diskriminant: $\mathcal{D} = (a - d)^2 + 4bc$

Eigenverdier: $\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{\mathcal{D}}}{2}, \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$

For $\mathcal{D} < 0$: $\beta = \frac{a+d}{2}$

$\mathcal{D} > 0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$: frastøtende likevektspunkt

$\mathcal{D} > 0, \lambda_1, \lambda_2 < 0$: tiltrekkende likevektspunkt

$\mathcal{D} > 0, \lambda_2 < 0 < \lambda_1$: bifurkasjon, én tiltrekkende linje

$\mathcal{D} < 0, \beta > 0$: utoverrettet spiral

$\mathcal{D} < 0, \beta < 0$: innoverrettet spiral

$\mathcal{D} < 0, \beta = 0$: periodiske stabile baner utenfor likevektspunktet