# MAT1100 Kalkulus – eksamen høsten 2021 (midtveiseksamen)

Oppgavetekst fra UiOs eksamen høsten 2021 (midtveiseksamen), MAT1100 (overskriften er eksamenssett.no sin; utsnittene under er klippet uendret ut av UiOs publiserte dokument)

**Oppgave 1.** Det komplekse tallet $z$ har polarkoordinater $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Da er $z^2$ lik:

A) $i$
B) $1 + i\sqrt{3}$
C) $4i$
D) $2 + 2i\sqrt{3}$
E) $-2\sqrt{3} + 2i$

**Oppgave 2.** Det komplekse tallet $z$ har polarkoordinater $r = 4$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. Da er kvadratrøttene til $z$ lik:

A) $\pm 2i$
B) $\pm(-8 + 8i\sqrt{3})$
C) $\pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$
D) $\pm(\sqrt{3} + i)$
E) $\pm(1 + i\sqrt{3})$

**Oppgave 3.** Om du starter i origo, går rett ut til punktet $z = 2 + 4i$, snur deg $90°$ til venstre og går halvparten så langt i denne retningen som du hittil har gått, så vil du komme til punktet:
A) $3 + 6i$
B) $4 - 3i$
C) $1 - 4i$
D) $5i$
E) $-1 - 5i$

**Oppgave 4.** Området $A$ i det komplekse planet er gitt ved

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - 1 - i| < |z + 1 + i|\}.$$

$A$ består av alle punkter $z = x + iy$ i det komplekse planet som

A) ligger over linjen $y = -x$
B) ligger innenfor både sirkelen om $1 + i$ med radius 2 og innenfor sirkelen om $-1 - i$ med radius 2.
C) ligger under linjen $y = 2x$.
D) ligger innenfor sirkelen om $1+i$ med radius 2, men utenfor sirkelen om $-1-i$ med radius 2.
E) ligger på den imaginære aksen.

**Oppgave 5.** Det *reelle* polynomet $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ har $i$ og 3 som røtter. Da er:

A) $P(z) = z^3 - 3z^2 + z - 3$
B) $P(z) = z^3 - 2z^2 + 2z - 3$
C) Vi må ha $c = 3$, men har ikke nok informasjon til å bestemme $a$ og $b$.
D) $P(z) = z^3 + 3z - 3$
E) Vi har ikke nok informasjon til å bestemme noen av koeffisientene.

**Oppgave 6.** Funksjonen $f(x) = x^2 - 4x$ er injektiv på intervallet:

A) $(-\infty, 4]$
B) $[-4, \infty)$
C) hele $\mathbb{R}$
D) $[2, \infty)$
E) $[-3, 5]$

**Oppgave 7.** Funksjonen $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x) = x^2 + 3x + 3$. Den omvendte funksjonen $g$ til $f$ er gitt ved:

A) $g(y) = \frac{-3+\sqrt{4y-3}}{2}$
B) $f$ har ingen omvendt funksjon.
C) $g(y) = \frac{-3-\sqrt{4y-3}}{2}$
D) Både $g(y) = \frac{-3+\sqrt{4y-3}}{2}$ og $g(y) = \frac{-3-\sqrt{4y-3}}{2}$ er omvendte funksjoner til $f$.
E) $g(y) = \frac{1}{y^2+2y+3}$

**Oppgave 8.** Hvis $g$ er den omvendte funksjonen til $f(x) = 3xe^{x^2} + 1$, så er $g'(1)$ lik:

A) $\frac{1}{3}$
B) $f$ har ingen omvendt funksjon.
C) $\frac{e^{-2}}{6}$
D) $6e^2$
E) 0

**Oppgave 9.** Funksjonen $f$ er definert for $x \geq 0$ ved $f(x) = x^{3/2} + x^{1/2}$. Da er $f$ konveks på mengden:

A) På hvert av intervallene $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \infty)$
B) Ingen steder
C) $[0, \infty)$
D) $[0, \frac{1}{3}]$
E) $[\frac{1}{3}, \infty)$

**Oppgave 10.** Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ og at $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{f(x)g'(x)} = L$. Da er også:

A) $\lim_{x\to a} \frac{\ln|f(x)|}{g(x)} = L$
B) $\lim_{x\to a} \frac{\ln|f(x)|}{g(x)} = \frac{\ln L}{L}$
C) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
D) $\lim_{x\to L} \frac{f(x)}{g(x)} = a$
E) $\lim_{x\to a} \frac{e^{f(x)}}{g(x)} = \frac{e^L}{L}$

**Oppgave 11.** For hvilket tall $p$ er $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^2}{x^p}$ forskjellig fra både 0 og $\infty$?

A) $p = 1$
B) $p = \frac{1}{2}$
C) $p = 2$
D) $p = 0$
E) Det finnes ikke noen slik $p$. Vi har $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^2}{x^p} = \begin{cases} \infty & \text{hvis } p \leq 1 \\ 0 & \text{hvis } p > 1 \end{cases}$

**Oppgave 12.** $\lim_{x\to\infty}\left((x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}+x\right)$ er lik:

A) $\frac{1}{3}$
B) $\infty$
C) 0
D) 1
E) 3

**Oppgave 13.** En følge er gitt ved $a_0 = 4$ og $a_{n+1} = \frac{a_n^2+10}{7}$. Da er $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik:

A) $\infty$
B) 0
C) 5
D) $\frac{5}{2}$
E) 2

**Oppgave 14.** Alt du får vite om funksjonen $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ er at den er kontinuerlig og at $f(-2) = 1$ og $f(2) = 5$. Da vet du også at:

A) $f$ har et maksimum i et indre punkt $c \in (-2,2)$.
B) Det finnes et et indre punkt $c \in (-2,2)$ der $f'(c) = 1$.
C) Det finnes et et indre punkt $c \in (-2,2)$ der $f(c) = 3$.
D) $f$ er voksende på $[-2,2]$.
E) $f$ er deriverbar i alle indre punkter $c \in (-2,2)$.

**Oppgave 15.** Funksjonen $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1 \\ 1 & \text{hvis } x = 1 \end{cases}$$

Den deriverte $f'(1)$ er lik:

A) $-\frac{2}{3}$
B) eksisterer ikke
C) 0
D)$-\frac{1}{2}$
E) $-\frac{1}{3}$

**Oppgave 16.** Du skal bruke definisjonen av grenseverdi til å vise at følgen $x_n = \frac{3n-5}{2n}$ har grenseverdi $\frac{3}{2}$. Gitt en vilkårlig $\epsilon > 0$, hvor stor må du velge $N$ for at $|x_n - \frac{3}{2}| < \epsilon$ når $n \geq N$?

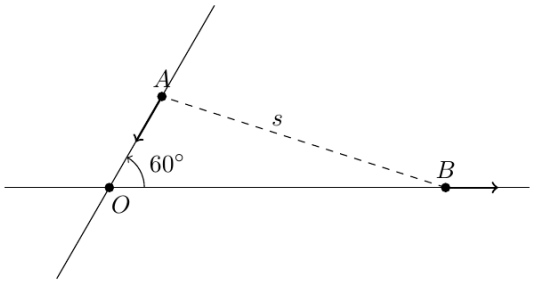
A) større enn $\min\{\frac{\epsilon}{4}, 1\}$
B) større enn $\frac{1}{\epsilon}$
C) større enn $\max\{\epsilon^2, 1\}$
D) større enn $\frac{5}{2\epsilon}$
E) større enn $\frac{3}{5\sqrt{\epsilon}}$

**Oppgave 17.** En eske skal ha kvadratisk bunn, men ingen topp. Volumet til esken skal være 4 $\text{dm}^3$. Hvor høy må esken være for at overflatearealet (bunn+sidevegger) skal bli minst mulig?

A) $\sqrt[3]{4}$ dm
B) $\frac{3}{2}$ dm
C) 1 dm
D) $\frac{3}{4}$ dm

E) Vi kan få arealet så lite vi måtte ønske

**Oppgave 18.** Figuren viser to kryssende veier sett ovenfra. Veiene møtes i punktet $O$, og vinkelen mellom dem er $60°$. Punktet $A$ viser en syklist som sykler mot $O$ med en fart på 28 km/t, mens punktet $B$ viser en syklist som sykler bort fra $O$ med en fart på 21 km/t. La $s$ være avstanden mellom $A$ og $B$ i luftlinje. Hvor raskt endrer $s$ seg i det øyeblikket $A$ er 3 km fra $O$, og $B$ er 8 km fra $O$?




A) $10\sqrt{5}$ km/t
B) 25 km/t
C) 22 km/t
D) 23.5 km/t
E) $9\sqrt{7}$ km/t

---

**Kilde:** Oppgaveteksten er gjengitt ordrett fra Universitetet i Oslo, Matematisk institutt: «Midtveiseksamen i MAT1100 H21: Løsningsforslag» (mat1100ueh21los.pdf), publisert på uio.no under MAT1100 – Tidligere midtveiseksamener. UiO publiserte oppgavesettet i samme fil som løsningsforslaget; dette arket inneholder bare oppgaveteksten, klippet ut av dokumentet uten endringer. Løsningsforslagets tekst er utelatt. Ifølge kilden roterte Inspera rekkefølgen på svaralternativene for hver kandidat. Hjemmeeksamen med alle hjelpemidler. Satt opp av eksamenssett.no, som ikke er tilknyttet UiO.