

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:                   MAT1100 — Kalkulus  
Eksamensdag:               Onsdag 29. november 2023  
Tid for eksamen:           09.00 – 13.00  
Oppgavesettet er på 2 sider.  
Vedlegg:                    Formelsamling  
Tillatte hjelpemidler:    Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før  
du begynner å besvare spørsmålene.

*Alle punktene (1a, 1b, 2a osv.) teller i utgangspunktet likt i sensuren. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter. Husk å begrunne svarene dine.*

**Oppgave 1** (20 poeng) I denne oppgaven er  $f(x, y) = e^{xy^2}$ .

- Regn ut gradienten  $\nabla f(x, y)$ .
- Finn den retningsderiverte  $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$  der  $\mathbf{a} = (-3, 2)$  og  $\mathbf{r} = (4, 1)$ .

**Oppgave 2** (20 poeng) Et bibliotek har to filialer  $A$  og  $B$ . Bøker man har lånt, kan leveres inn igjen ved begge filialene uavhengig av hvor de ble lånt. Bibliotekarene tar en opptelling i begynnelsen av hvert år. Den viser at av de bøkene som var i filial  $A$  i begynnelsen av et år, vil 80 % være i filial  $A$  året etter, mens 15 % vil være i filial  $B$ . Resten av bøkene vil være mistet eller makulert. Opptellingen viser også at av de bøkene som var i filial  $B$  i begynnelsen av et år, vil 20 % være i filial  $A$  året etter, mens 70 % vil være i filial  $B$ , og resten vil være mistet eller makulert.

- Finn en matrise  $M$  slik at dersom det i begynnelsen av et år er  $x$  og  $y$  bøker i filialene  $A$  og  $B$ , så vil fordelingen  $x'$  og  $y'$  av disse bøkene året etter være gitt ved

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Regn også ut  $M^2$ .

- I begynnelsen av ett år er det 100 000 bøker i hver av filialene. Hvor mange av disse bøkene er det i hver av filialene to år etter? Hvor mange av de opprinnelige bøkene er mistet eller makulert?

(Fortsettes på side 2.)

**Oppgave 3** (10 poeng)

Området mellom  $x$ -aksen og grafen  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , dreies om  $y$ -aksen. Finn volumet til omdreingslegemet. Skriv svaret så enkelt som mulig.

**Oppgave 4** (20 poeng)

a) Regn ut

$$\int \frac{4x + 5}{x^2 + 4x + 5} dx$$

b) Regn ut

$$\int 2x \arctan(x + 2) dx$$

**Oppgave 5** (20 poeng)

I denne oppgaven er  $R$  et positivt reelt tall, og funksjonene  $f, g: (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  er definert ved

$$f(x) = \arccos \frac{x}{R}$$

og

$$g(x) = \arctan \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}$$

a) Regn ut  $f'(x)$  og  $g'(x)$  og vis at de er like.b) Bruk a) til å vise at  $f(x) = g(x)$ . Gi en geometrisk forklaring på hvorfor det er slik.**Oppgave 6** (30 poeng)

I denne oppgaven er  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en funksjon med kontinuerlig annenderivert slik at  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 2$ ,  $f''(0) = 3$ . En annen funksjon  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er definert ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ a & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

der  $a$  er en konstant.a) Du får vite at  $g$  er kontinuerlig. Hva er  $a$ ?b) Vis at  $g$  er deriverbar i 0 og finn  $g'(0)$ .c) Vis at dersom  $f$  er konveks på hele  $\mathbb{R}$ , så er  $g$  voksende (*Hint*: Det kan være lurt å behandle tilfellene  $x > 0$  og  $x < 0$  hver for seg.)

SLUTT