UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT1100 – Kalkulus.
Eksamensdag:	Tirsdag 10.10.2006
Tid for eksamen:	09.00–11.00.
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Kandidatnr. ___________

Eksamen består av 20 spørsmål. De 10 første teller 2 poeng hver, de 10 siste teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 4$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Da er z lik:

☐ $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
☐ $-2 + 2i\sqrt{3}$
☐ $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
☐ $-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
☐ $-2\sqrt{3} + 2i$

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = 3 - 3i\sqrt{3}$ har polarkoordinater:

☐ $r = 6, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 6, \theta = \frac{\pi}{3}$
☐ $r = \sqrt{18}, \theta = \frac{4\pi}{3}$
☐ $r = i\sqrt{18}, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 6, \theta = \frac{11\pi}{12}$

3. (2 poeng) Dersom $z = \frac{7+i}{1+3i}$, så er:

☐ $z = -\frac{5}{4} - \frac{5}{2}i$
☐ $z = 2 - i$
☐ $z = \frac{22}{5} + \frac{11}{5}i$
☐ $z = \frac{2}{5} - 2i$
☐ $z = 1 - 2i$

4. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arctan(e^x)$ er:

☐ $\frac{e^x}{1+x^2}$
☐ $\frac{e^x}{\arccos(e^x)}$
☐ $\frac{1}{1+e^{2x}}$
☐ $\tan(e^x)$
☐ $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

5. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = x\cot(x^2)$ er:
- ☐ $\frac{2x}{\sin(x^2)}$
- ☐ $\cot(x^2) + 2x^2\tan(x^2)$
- ☐ $\cot(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4}$
- ☐ $\cot(x^2) - \frac{2x^2}{\sin^2(x^2)}$
- ☐ $\tan(x^2)$

6. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^5-2n^3+3}{4n^2-3n^3-2n^5}$ er lik:
- ☐ $-\frac{7}{2}$
- ☐ $-\infty$
- ☐ 0
- ☐ $\frac{7}{4}$
- ☐ $\frac{3}{4}$

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$ er lik:
- ☐ $-\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ 1

8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$ er lik:
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 0
- ☐ ∞
- ☐ 3
- ☐ 1

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = e^{2x} + 3$ er:
- ☐ $g(x) = \frac{1}{e^{2x}+3}$
- ☐ Det finnes ingen omvendt funksjon
- ☐ $g(x) = \ln(\frac{x-3}{2})$
- ☐ $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{3}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x-3)$

10. (2 poeng) Funksjonen f har en omvendt funksjon g. Dersom vi vet at $f(1) = 4$ og $f'(1) = 3$, så vet vi også at:
- ☐ $g'(\frac{1}{3}) = 4$
- ☐ $g'(1) = \frac{1}{3}$
- ☐ $g'(3) = 4$
- ☐ $g'(4) = \frac{1}{3}$
- ☐ $g'(4) = 3$

11. (3 poeng) Den deriverte til $x^{\cos x}$ er lik:
- ☐ $\cos(x)x^{\cos x-1}$
- ☐ $-x^{\cos x}\sin x$
- ☐ $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\ln(x)\sin(x)\right)$
- ☐ $e^{\cos(x)\ln x}$
- ☐ $x^{\cos x}+x^{-\sin x}$

12. (3 poeng) Det *reelle* fjerdegradspolynomet $P(z)=z^4+az^3+bz^2+cz+d$ har i og $1-i$ som røtter. $P(z)$ er lik:
- ☐ z^4+5z^2+4
- ☐ $z^4-2z^3+6z^2-2z+5$
- ☐ $z^4-2z^3+6z^2-8z+8$
- ☐ z^4-5z^2+3z+2
- ☐ $z^4-2z^3+3z^2-2z+2$

13. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$ er lik:
- ☐ 0
- ☐ $e^{-\frac{1}{2}}$
- ☐ ∞
- ☐ 1
- ☐ e^2

14. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2} & \text{hvis } x\neq 0\\ A & \text{hvis } x=0\end{cases}$. For hvilken verdi av A er f kontinuerlig?
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ -1
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ Ingen verdi av A

15. (3 poeng) Når $x\to\infty$, har funksjonen $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ asymptoten:
- ☐ $y=x$
- ☐ Den har ingen asymptote
- ☐ $y=2x+1$
- ☐ $y=x+1$
- ☐ $y=x+\frac{1}{2}$

16. (3 poeng) Funksjonen $f(x)=1-x^{\frac{4}{5}}$ er konveks på:
- ☐ Hele $\mathbb{R}$
- ☐ Ingen steder
- ☐ $(-\infty,1)$
- ☐ Hvert av intervallene $(-\infty,0]$ og $[0,\infty)$
- ☐ $(-1,\infty)$

17. (3 poeng) Løsningene til annengradsligningen $z^2 + (1-i)z - i = 0$ er:

- ☐ $z = -i$ og $z = 1$
- ☐ $z = i$ og $z = -i$
- ☐ $z = 2i$ og $z = -1$
- ☐ $z = i$ og $z = -1$
- ☐ $z = \frac{i}{2}$ og $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$

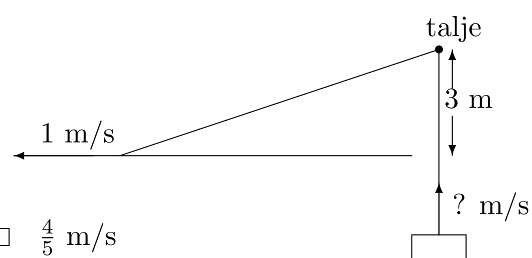
18. (3 poeng) Du skal bruke definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = 6x + 3$ er kontinuerlig i $a = 2$. Gitt en vilkårlig $\epsilon > 0$, hvor liten må du velge δ for at $|f(x) - f(2)| < \epsilon$ når $|x - 2| < \delta$?

- ☐ Mindre enn $\min\{\frac{\epsilon}{2}, 1\}$
- ☐ Mindre enn $\frac{1}{\epsilon}$
- ☐ Mindre enn $\min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$
- ☐ Mindre enn $\frac{\epsilon}{6}$
- ☐ Mindre enn $\frac{\epsilon}{4}$

19. (3 poeng) En sylinderformet boks skal ha et volum på 16 dm^3. Du skal lage boksen slik at overflatearealet (sideflate+bunn+topp) blir minst mulig. Hvilken radius må du velge?

- ☐ $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm
- ☐ $r = \frac{\pi}{2}$ dm
- ☐ $r = \frac{3}{2}$ dm
- ☐ Vi kan få arealet så lite vi måtte ønske
- ☐ $r = \frac{5}{\pi}$ dm

20. (3 poeng) En tung gjenstand skal heises opp fra en brønn. Et 10 meter langt tau er festet i gjenstanden, ført gjennom en talje som henger 3 meter over bakken og deretter ned på bakkenivå som vist på figuren. Den løse enden av tauet blir dratt vannrett bortover med en fart på 1 m/s. Hvor fort beveger gjenstanden seg oppover i det øyeblikket den henger 5 meter under taljen?



- ☐ $\frac{4}{5}$ m/s
- ☐ 1 m/s
- ☐ $\frac{1}{2}$ m/s
- ☐ $\frac{3}{4}$ m/s
- ☐ $\frac{6}{5}$ m/s

SLUTT