UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT1100 – Kalkulus.
Eksamensdag:	Tirsdag 9.10.2007.
Tid for eksamen:	09.00–11.00.
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Kandidatnr. ___________

Eksamen består av 20 spørsmål. De 10 første teller 2 poeng hver, de 10 siste teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 2$, $\theta = \frac{11\pi}{6}$. Da er z lik:

☐ $-\sqrt{3} - i$
☐ $1 - i\sqrt{3}$
☐ $-2i$
☐ $-\sqrt{3} + i$
☐ $\sqrt{3} - i$

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ har polarkoordinater:

☐ $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 8, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{4}$
☐ $r = 8, \theta = \frac{13\pi}{6}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{15\pi}{6}$

3. (2 poeng) Dersom $z = 3e^{i\frac{5\pi}{12}}$ og $w = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$, så er zw lik:

☐ $-6i$
☐ $-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$
☐ $3 - 3i\sqrt{3}$
☐ $-3 - 3i\sqrt{3}$
☐ $-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$

4. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}-2n^2}$ er lik:

☐ $\frac{7}{4}$
☐ $-\frac{3}{2}$
☐ ∞
☐ $-\frac{7}{2}$
☐ $\frac{3}{4}$

5. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = x \cot x$ er:
- ☐ $-\frac{1}{\sin(x^2)}$
- ☐ $\cot x + \frac{x}{1+x^2}$
- ☐ $\cot x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $\cot x - \frac{x^2}{2\sin^2 x}$
- ☐ $\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$

6. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arcsin(e^x)$ er:
- ☐ $\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $\frac{e^x}{\arccos(e^x)}$
- ☐ $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
- ☐ $\arccos(e^x)e^x$
- ☐ $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$ er lik:
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ 2

8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}-x}$ er lik:
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 2
- ☐ 0
- ☐ 1

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = 2\ln 3x + 4$ er:
- ☐ $g(x) = 2e^{3x} + 4$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{2\ln 3x+4}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{6}e^y + \frac{2}{3}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{y}{2}-2}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{2}e^{4x-3}$

10. (2 poeng) Hvis g er den omvendte funksjonen til $f(x) = x^3 + 5x + 2$, så er $g'(2)$ lik:
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{5}$
- ☐ 2
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 5

11. (3 poeng) Kvadratrøttene til det komplekse tallet $1 + i$ er:

☐ $\pm 2i$

☐ $\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$

☐ $\pm\sqrt[4]{2}i$

☐ $\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}$

☐ $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/12}$

12. (3 poeng) Anta at $h(x) = f(x)^{g(x)}$, der f og g er to deriverbare funksjoner og $f(x) > 0$. Da er den deriverte $h'(x)$ lik:

☐ $g(x)f(x)^{g(x)-1}$

☐ $h(x)\ln(f(x))$

☐ $h(x)\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$

☐ $e^{g(x)\ln(f(x))}$

☐ $h(x)e^{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

13. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{\frac{3}{x}}$ er lik:

☐ 0

☐ $e^{-\frac{1}{3}}$

☐ e

☐ -3

☐ e^3

14. (3 poeng) Det *reelle* tredjegradspolynomet $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ har 3 og $1 - i$ som røtter. $P(z)$ er lik:

☐ $z^3 - z^2 - 7z + 3$

☐ $z^3 - 2z^2 - z - 6$

☐ $z^3 - 5z^2 + 8z - 6$

☐ $z^3 - 7z^2 + 10z + 6$

☐ $z^3 - z^2 - z - 6$

15. (3 poeng) Når $x \to \infty$, har funksjonen $f(x) = x\cos(x^{-\frac{1}{2}})$ asymptoten:

☐ $y = x$

☐ $y = \frac{1}{2}x - 1$

☐ $y = x - \frac{1}{2}$

☐ $y = x + 1$

☐ $y = x + \frac{1}{4}$

16. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{hvis } x < 0 \\ 3e^{2x} & \text{hvis } x \geq 0 \end{cases}$

(A og B er konstanter). For hvilke verdier av A og B er f deriverbar i 0?

☐ $A = 6, B = 3$

☐ $A = 3, B = 2$

☐ $A = 2, B = 3$

☐ $A = 3, B = 3$

☐ $B = 3$ og alle verdier for A

17. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 2x + 1$ er konkav på intervallet:

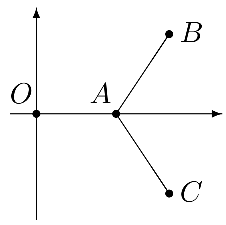
☐ $[1, 4]$
☐ $[-4, 4]$
☐ $(-\infty, -1]$
☐ $[-4, 1]$
☐ $[4, \infty)$

18. (3 poeng) Funksjonene $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i hele $[a, b]$ og deriverbare i alle indre punkter $c \in (a, b)$. Funksjonene har samme verdi i endepunktene av intervallet, dvs. $f(a) = g(a)$ og $f(b) = g(b)$. Da er følgende påstand alltid riktig:

☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = g(c)$
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c)$
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ der den ene funksjonen har et lokalt maksimum og den andre et lokalt minimum
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = g''(c)$
☐ Ingen av de foregående påstandene behøver å holde

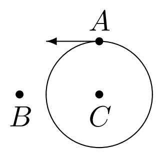
19. (3 poeng) Figuren nedenfor viser en arbeidstegning over et kabelarbeid. En kabel skal føres fra origo O til et punkt A på x-aksen. Fra A skal det gå to kabler videre, én til punktet B med koordinater $(5, 3)$ og én til punktet C med koordinater $(5, -3)$. Hvor skal punktet A plasseres for at den totale kabellengden skal bli kortest mulig?

☐ $(5 - \sqrt{3}, 0)$
☐ $(5, 0)$
☐ $(5 - \sqrt{2}, 0)$
☐ $(3, 0)$
☐ $(\sqrt{5}, 0)$



20. (3 poeng) En mann står stille og ser sin datter kjøre karusell. Figuren nedenfor viser situasjonen sett ovenfra. Karusellen fører jenta rundt i en sirkelbane med radius 6 meter, og den bruker ett minutt på hver omdreining. Avstanden fra faren B til sentrum C i karusellen er 8 meter. Hvor fort avtar avstanden mellom far og datter når datteren er i punkt A på figuren (dvs. i punktet der $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$)?

☐ 15π meter/minutt
☐ 12π meter/minutt
☐ $5\sqrt{2}\pi$ meter/minutt
☐ 9.6π meter/minutt
☐ 8π meter/minutt



Slutt