UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT1100 – Kalkulus.
Eksamensdag:	Mandag 6.10.2008.
Tid for eksamen:	15.00–17.00.
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.
Oppgavesettet er på 5 sider.	

Kandidatnr. __________

Eksamen består av 20 spørsmål. De 10 første teller 2 poeng hver, de 10 siste teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 4$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$. Da er z lik:

☐ $-\sqrt{3} - i$
☐ $-\sqrt{3} + i$
☐ $-2\sqrt{3} - 2i$
☐ $-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
☐ $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -2 + 2i$ har polarkoordinater:

☐ $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{6}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{3\pi}{4}$
☐ $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4}$
☐ $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{6}$

3. (2 poeng) Dersom $z = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$ og $w = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$, så er zw lik:

☐ $16 + 16i\sqrt{3}$
☐ $8 - 8i\sqrt{3}$
☐ $4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$
☐ $-16 + 16i\sqrt{3}$
☐ $-4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$

4. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+n\sqrt{n}}{\sqrt{4n^4+9n^3}}$ er lik:

☐ $\frac{9}{2}$
☐ $\frac{9}{4}$
☐ $\frac{1}{3}$
☐ ∞
☐ 9

5. (2 poeng) Grenseverdien $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ er lik:

- ☐ 0
- ☐ ∞
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{1}{3}$

6. (2 poeng) Grenseverdien $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{e^{x/2}-1}$ er lik:

- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 2
- ☐ 0
- ☐ ∞

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos x}$ er lik:

- ☐ 1
- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ $-\infty$
- ☐ $\frac{1}{2}$

8. Den deriverte til $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ er:

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
- ☐ $\frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+x)\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x)=e^{x^3+1}$ er:

- ☐ $g(x)=(\ln x-1)^{\frac{1}{3}}$
- ☐ $g(x)=e^{((x-1)^{\frac{1}{3}})}$
- ☐ $g(x)==e^{(-(x-1)^{\frac{1}{3}})}$
- ☐ $g(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|$
- ☐ $g(x)=\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

10. (2 poeng) Hvis g er den omvendte funksjonen til $f(x)=\ln(2x-1)$, så er $g'(0)$ lik:

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ $\frac{1}{e}$

11. (3 poeng) Hvis $2i$ er en tredjerot til et komplekst tall z så er en annen tredjerot til z lik:
- ☐ $2\sqrt{3} - i$
- ☐ $-\sqrt{3} - i$
- ☐ $-2i$
- ☐ $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- ☐ $1 + i\sqrt{3}$

12. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{hvis } x > 0 \\ \cos(\pi x) + b & \text{hvis } -1 \leq x \leq 0 \\ e^{x^2-1} & \text{hvis } x < -1 \end{cases}$

(a og b er konstanter). For hvilke verdier av a og b er f kontinuerlig ?
- ☐ $a = 3, b = 2$
- ☐ $a = 2, b = 3$
- ☐ $a = b = 1$
- ☐ $a = b = 2$
- ☐ $a = -2, b = 3$

13. (3 poeng) Anta at f er en deriverbar funksjon med $f(x) > 0$.
La $h(x) = f(x)^{\ln f(x)}$. Da er den deriverte, $h'(x)$ lik:
- ☐ $f'(x)$
- ☐ $2h(x)\frac{\ln f(x)}{f(x)}f'(x)$
- ☐ $h(x)(\ln f(x))f'(x)$
- ☐ $\frac{h(x)}{f(x)}f'(x)$
- ☐ $h(x)\frac{\ln f(x)}{f(x)}f'(x)$

14. (3 poeng) Funksjonene $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i hele $[a, b]$ og deriverbare i alle indre punkter $c \in (a, b)$. Vi har videre at $f(a) = g(b)$ og $f(b) = g(a)$. Da er følgende påstand alltid riktig:
- ☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c)$
- ☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = -g'(c)$
- ☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = -g(c)$
- ☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ der $f - g$ har en lokal ekstremverdi
- ☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) + g'(c) = \frac{f(b)-f(a)+g(a)-g(b)}{b-a}$

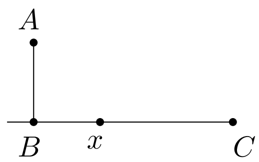
15. (3 poeng) Det *reelle* femtegradspolynomet
$P(z) = z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ har 0, i og $-2i$ som røtter.
$P(z)$ er lik:
- ☐ $z^5 + z^4 - 2z^2$
- ☐ $z^5 - 3z^3 - z - 4z$
- ☐ $z^5 + 5z^3 + 4z$
- ☐ $z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 4z^2 + 5z$
- ☐ $z^5 - 5z^3 - 4z^2 + 1$

16. (3 poeng) La $f(x) = (2x+1)e^{-x^2}$ der $x \in [-2, 2]$. Da har f et globalt minimumspunkt for:
- ☐ $x = 2$
- ☐ $x = -2$
- ☐ $x = -1$
- ☐ $x = 0$
- ☐ $x = \frac{1}{2}$

17. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = x^2 e^x$ er konkav på intervallet:
- ☐ $[-1, \infty)$
- ☐ $(-\infty, -1]$
- ☐ $[-2+\sqrt{2}, \infty]$
- ☐ $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$
- ☐ $[-2+\sqrt{3}, \infty)$

18. (3 poeng) Grenseverdien $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\pi - 2x)}{\tan x}$ er lik:
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ ∞
- ☐ 2
- ☐ $-\infty$

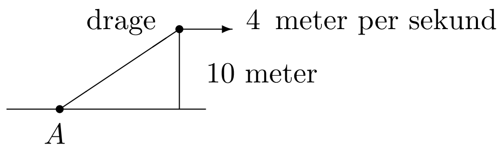
19. (3 poeng) Du padler i en kajakk og er på et punkt A utenfor en rettlinjet strand. Fra A til nærmeste punkt B på stranda er det 200 meter. Du ønsker å komme til en hytte i strandkanten som ligger i C 500 meter fra B. Du vil padle videre med en hastighet 100 meter per minutt til et punkt på stranda som er x meter fra B og så løpe til hytta i C med en hastighet på 300 meter per minutt (se tegning nedenfor). Hva må x være for at du skal nå hytta raskest mulig ?



- ☐ 0 meter
- ☐ $100\sqrt{3}$ meter
- ☐ $50\sqrt{2}$ meter
- ☐ 200 meter
- ☐ 500 meter

20. (3 poeng) En jente står stille på bakken og holder i en drage. Hånden som holder i dragen er hele tiden i et fast punkt A. Etter hvert som vinden blåser dragen bortover slipper hun ut mer og mer snor. Dragen er hele tiden 10 meter over et plan gjennom A parallelt med bakken, og dragen beveger seg horisontalt, parallelt med bakken med konstant hastighet 4 meter per sekund. Vi antar at dragesnora som er ute alltid er stram (se tegning nedenfor). Hvor mange meter snor per sekund må slippes ut når lengden på snora som er ute er 20 meter?

- ☐ 2 meter per sekund
- ☐ $3\sqrt{2}$ meter per sekund
- ☐ 4 meter per sekund
- ☐ $2\sqrt{3}$ meter per sekund
- ☐ 1 meter per sekund



Slutt