UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 15. oktober 2010.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

SVARENE FØRES PÅ EGET SVARARK

Alle oppgavene teller 1 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 20. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgaveark

Oppgave 1. Den deriverte til funksjonen $f(x) = \sin(\pi \cos(x))$ er:

A $\cos(\pi \sin(x))$

B $-\pi \sin(x) \cos(\pi \cos(x))$

C $-\pi \cos(x) \cos(\pi \cos(x))$

D $-\pi \sin(x) \cos(\pi \sin(x))$

E $\pi \cos(\pi \cos(x))$

Oppgave 2. Det komplekse tallet $i/(1+i)$ blir på formen $re^{i\theta}$:

A $2e^{i\frac{7}{4}\pi}$

B $2e^{i\frac{1}{4}\pi}$

C $(\sqrt{2}/2)e^{i\pi/4}$

D $\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

E $\sqrt{2}i$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Det komplekse tallet $z = 3e^{i\frac{5}{6}\pi}$, z er lik:

A $-(3/2)\sqrt{3} + (3/2)i$

B $-3\sqrt{3} - (3/4)i$

C $-1\sqrt{3} + (1/4)i$

D $-3 + 3i$

E $3\sqrt{3} - (3/4)i$

Oppgave 4. Polynomet $z^3 - 3z^2 + 6z - 4$ har røtter

A 1, 2 og $1 + i$

B 1, $1 - i$ og $1 + i$

C 1, $1 - i\sqrt{3}$ og $1 + i\sqrt{3}$

D -1, $1 - i\sqrt{3}$ og $1 + i\sqrt{3}$

E i, $1 - i\sqrt{3}$ og $1 + i\sqrt{3}$

Oppgave 5. For $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, definer $w = \bar{z}/z$. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A $w \in \mathbb{R}$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

B w er rent imaginær for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

C $w = 1/\bar{z}$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

D $\overline{wz} = \bar{z}^2$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

E $|w| = 1$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Oppgave 6. Det komplekse tallet $z = e^{i\pi/3} + \sqrt{3}e^{i7\pi/6}$ er lik

A $-i$

B e^i

C $(1 + \sqrt{3})e^{i9\pi/6}$

D -1

E 1

Oppgave 7. La

$$a_n = e^{\frac{\sin(n)}{n}}, \; n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Da er $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik

A 1

B π

C Ingenting, følgen divergerer.

D 0

E e

Oppgave 8. Den deriverte til $f(x) = \ln(\cos(x))$ er

A $-\tan(x)$

B $1/\sin(x)$

C $-1/\sin(x)$

D Fins ikke, siden f ikke er deriverbar.

E 1

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. Grenseverdien

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)+x^2}-x} \text{ blir}$$

A 1

B 1/2

C $1+\sqrt{2}$

D Grensen eksisterer ikke

E ∞

Oppgave 10. Grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \text{ blir}$$

A 0

B 1

C e

D $1/e$

E ∞

Oppgave 11. Den deriverte til funksjonen

$$f(x) = x\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \text{ er:}$$

A $x/(1+x^2)$

B $1/(1+x^2)+\ln(1+x^2)$

C $x^2/(1+x^2)+\ln(1/(1+x^2))$

D $-2x^2/(1+x^2)+\ln(1/(1+x^2))$

E $x^2/(1+x^2)$

Oppgave 12. En sylinderformet eske med høyde x og radius r skal ha volum lik 1. Hvilken radius må esken ha hvis det totale overflatearealet (topp, bunn og sidevegg) skal bli minst mulig?

A π

B $\sqrt{2\pi}$

C 1

D $(2\pi)^{1/3}$

E $(2\pi)^{-1/3}$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Vi har at

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Den inverse til denne funksjonen, $\sinh^{-1}(y)$, er gitt ved:

A $2(\ln(-y) - \ln(y))$
B $\ln(y + \sqrt{y^2+1})$
C $\ln(y - \sqrt{y^2+1})$
D $\sin(y)$
E Funksjonen har ingen inversfunksjon

Oppgave 14. Når $x \to \infty$ har funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

asymptote:

A $y = x$
B $y = \sqrt{x^2+1}$
C $y = x + 1$
D $y = 2x + 1$
E $y = x - 1$

Oppgave 15. Funksjonen

$$f(x) = e^{-x^2}$$

er konkav på mengden:

A $[0, \infty)$
B $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$
C $(-\infty, -1/\sqrt{2})$
D $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
E Ingen steder

Oppgave 16. Funksjonen $f : (0, \sqrt{\pi}/2) \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x^2))}{x^4}.$$

Da blir grensen $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

A ∞
B 1
C 0
D $1/4$
E $-1/2$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Den andrederiverte til funksjonen

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

er

A $e^{\sin(x)}(\sin^2(x) + \cos(x))$

B $e^{\sin(x)} \cos(x))$

C $e^{\sin(x)}(\cos^2(x) - \sin(x))$

D $e^{\sin(x)}(\cos^2(x) + \cos(x))$

E $e^{\cos(x)}$

Oppgave 18. Funksjonen

$$f(x) = e^{\sin^3(x)} \text{ er injektiv på mengden:}$$

A $[0, \infty)$

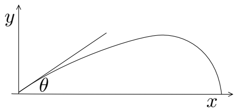
B $[-\pi/2, \pi/2]$

C $[-\pi/2, \pi/2] \bigcup [5\pi/2, 7\pi/2]$

D $[-2, 2]$

E hele $\mathbb{R}$

Oppgave 19. Et prosjektil som skytes ut med en vinkel $\theta \in [0, \pi/2]$ har etter en tid t posisjonen $(x(t), y(t))$, der $x(t) = (\frac{\pi}{2} - \theta)\sqrt{t}$ og $y(t) = \theta t - \frac{t^2}{2}$.



Prosjektilet lander når det etter en tid s treffer bakken, slik at $y(s) = 0$. Hvilken utgangsvinkel θ vil maksimere lengden $x(s)$?

A $\pi/4$

B $\pi/2$

C $\pi/\sqrt{5}$

D $\pi/6$

E $\pi/12$

Oppgave 20. En konkav og to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon f er slik at $f(x) > 0$ for alle x med i definisjonsområdet til f, D_f. Sett $g(x) = 1/f(x)$. Hvilket av følgende utsagn må da være sant?

A g er konkav på D_f

B g er konveks på D_f

C g er verken konveks eller konkav på D_f

D g er voksende på D_f

E g er avtagende på D_f

SLUTT