

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra

Eksamensdag: Tirsdag 12. august 2025

Tid for eksamen: 9:00 – 13:00

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: Formelsamling

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 10 deloppgaver som hver teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

a

Avgjør om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er inverterbar og finn i så fall den inverse matrisen.

b

Vis at funksjonen

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn rundt $(-1, 1, -1)$ slik at $\mathbf{G}(-1, 1, -1) = (1, -1, 1)$.

Oppgave 2

La funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = x^2 + 4xy - \frac{8}{3}y^3.$$

a

Finn de stasjonære punktene til f .

b

Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

Oppgave 3

Finn maksimumsverdien og minimumsverdien til funksjonen

$$f(x, y, z) = xy - \frac{z^2}{2}$$

under bibetingelsen

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1.$$

Oppgave 4

La A være området i første kvadrant som ligger under linja $x + 2y = 2$. Regn ut

$$\iint_A (1 + y) \, dx dy.$$

Oppgave 5

La D være området i rommet som ligger inni kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ og over flaten $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Regn ut volumet til D .

Oppgave 6

Flaten T har parametriseringen

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

a

Skisser flaten T og vis at

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = (\sin v, -\cos v, u).$$

b

Regn ut $\int_T \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS$ når $\mathbf{G}$ er vektorfeltet gitt ved

$$G(x, y, z) = y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$$

og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen som peker oppover.

c

La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \phi(1, t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Regn ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$F(x, y, z) = yz\mathbf{i} + \sin(y^2)\mathbf{j}.$$