

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 1120 — Lineær algebra

Eksamensdag: Mandag, 11. desember 2017.

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 8 sider.

Vedlegg: En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 2b osv.) teller likt.

Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1a

Vis at

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A . Finn alle egenverdiene til A .

(Fortsettes på side 2.)

1b

Begrunn at A er ortogonalt diagonaliserbar. Bestem deretter en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D som gir en ortogonal diagonalisering av A .

1c

Betrakt den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$$

der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Finn en ortogonal 3×3 matrise P slik at variabelskifte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transformerer $Q(\mathbf{x})$ til en kvadratisk form uten kryssledd. Angi den nye kvadratiske formen og finn maksimum av $Q(\mathbf{x})$ når $\mathbf{x}$ varierer gjennom alle $\mathbf{x}$ i enhetssfæren $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 2

La A være 3×2 matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La $W = \text{Col}A$ være kolonnerommet til A .

2a

Finn en ortonormal basis $\mathcal{B}$ for W . Finn en QR-faktorisering av A .

2b

Sett $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$. Beregn den ortogonale projeksjonen $\hat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$ av $\mathbf{y}$ ned i W . Skriv $\mathbf{y}$ som en sum $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ der $\mathbf{y}_1 \in W$ og $\mathbf{y}_2 \in W^\perp$. (Her betegner $W^\perp$ det ortogonale komplementet til W .)

(Fortsettes på side 4.)

2c

Finn β_0 og β_1 slik at grafen til funksjonen $y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ gir beste minste kvadraters tilpassing til måleresultatene $(-1, 0.4)$, $(1, 0.1)$, $(3, -0.8)$.

Sett $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ -0.8 \end{bmatrix}$. Finn feilvektoren $\epsilon = \mathbf{u} - \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(1) \\ f(3) \end{bmatrix}$.

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Vis at 2 er en egenverdi til A . Avgjør om A er diagonaliserbar.

Oppgave 4

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2 i en reell variabel t . La $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{P}_2$, dvs $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ og $p_2(t) = t^2$.

Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_2$ ved

$$q_1(t) = 1 + t, \quad q_2(t) = t + t^2, \quad q_3(t) = t - t^2.$$

4a

Begrunn at $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Finn basisskifte-matrisen, ${}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}P$ fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, og finn den tilsvarende basisskifte-matrise ${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}P$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

(Fortsettes på side 6.)

Definer en lineærabildning $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ ved at et polynom $p \in \mathbb{P}_2$ avbildes over i $T(p)$, der

$$(T(p))(t) = p(1) + tp'(t).$$

4b

Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ for T relativt til $\mathcal{B}$. Finn også matrisen $[T]_{\mathcal{C}}$ for T relativt til $\mathcal{C}$.

(Fortsettes på side 7.)

4c

Finn en egenvektor for $[T]_{\mathcal{B}}$ med egenverdi 2. Finn $p \in \mathbb{P}_2$ slik at $T(p) = 2p$.

Lykke til!

(Fortsettes på side 8.)

Matlab-utskrift.

```
>> C
```

```
C =
```

```
    1    0    0    1    0    0
   -0.5   0.5   0.5   0    1    0
   -0.5   0.5  -0.5   0    0    1
```

```
>> rref(C)
```

```
ans =
```

```
    1    0    0    1    0    0
    0    1    0    1    1    1
    0    0    1    0    1   -1
```