

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 1120 — Lineær algebra

Eksamensdag: Tirsdag 29 november, 2022

Tid for eksamen: 9.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: en Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.

Tillatte hjelpemidler: ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamenssettet består av tilsammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1a

Finn en basis $\mathcal{B}$ for $\text{Col}(A)$ som består av søyler i A . Skriv søyler i A som ikke er med i basisen $\mathcal{B}$ som lineære kombinasjoner av vektorene i $\mathcal{B}$. Hva er dimensjonen til $\text{Nul}(A)$?

(Fortsettes på side 2.)

1b

Vis at de to første radene i A danner en basis $\mathcal{C}$ for radrommet $\text{Row}(A)$ til A .

1c

For vektorene

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

regn ut koordinatvektorene $[v]_{\mathcal{B}}$ og $[w]_{\mathcal{C}}$.

Oppgave 2

La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2a

Finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

(Fortsettes på side 3.)

2b

Beregn A^{10} .

Oppgave 3

Betrakt den kvadratiske formen $Q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2$ på $\mathbb{R}^3$.

3a

Finn maksimum

$$M = \max_{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|=1} Q(x),$$

og en vektor $x_0 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\|x_0\| = 1$ og $Q(x_0) = M$.

3b

La

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Finn maksimum av Q på

$$\{v \in V : \|v\| = 1\}.$$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4

Betrakt vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer av grad opptil 2.

4a

Forklar hvorfor formelen

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

definerer et indreprodukt på $\mathbb{P}_2$.

4b

Betrakt underrommet $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_2$ av polynomer av grad opptil 1 og den ortogonale projeksjonen $Q: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1$ (m.h.p. indreproduktet definert ovenfor). For $p(t) = a + bt + ct^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), har vi

$$Q(p) = \beta_0 + \beta_1 t$$

for noen $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$. Finn formel for β_0 og β_1 .

(Fortsettes på side 5.)

4c

Beskriv alle polynomene p i $\mathbb{P}_2$ slik at 0 er punktet i $\mathbb{P}_1$ som er nærmest p (m.h.p. indreproduktet definert ovenfor).

Husk Matlab-utskriften på neste side!

(Fortsettes på side 6.)

Matlab-utskrift.

```
>> A=[1 0 2 1 -1  
0 -1 1 1 -2  
1 -1 3 2 -3  
1 -1 3 2 -3]
```

A =

1	0	2	1	-1
0	-1	1	1	-2
1	-1	3	2	-3
1	-1	3	2	-3

```
>> R=rref(A)
```

R =

1	0	2	1	-1
0	1	-1	-1	2
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0