

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 1120 — Lineær algebra

Eksamensdag: 18.01.2023

Tid for eksamen: 9.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: en Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.

Tillatte hjelpemidler: ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamenssettet består av tilsammen 10 deloppgaver slik at hver gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I Oppgaver 1b og 1c betrakter vi $\mathbb{R}^3$ med prikkproduktet.

1a

Finn en basis for $\text{Col}(A)$ som består av kolonner i A . Er A invertibel? Gi et argument for svaret ditt.

1b

Finn en ortogonal basis for $\text{Col}(A)$.

(Fortsettes på side 2.)

1c

Finn den ortogonale projeksjonen av

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

på $\text{Col}(A)$. Beregn avstanden fra y til $\text{Col}(A)$.

Oppgave 2

Betrakt matrisen

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

for et reelt tall $\alpha \in \mathbb{R}$.

2a

Argumenter at A_α er diagonaliserbar for hver $\alpha > 0$. (Du trenger ikke finne en slik diagonalisering.)

(Fortsettes på side 3.)

2b

Er A_α diagonaliserbar for $\alpha = 0$? Gi et argument for svaret ditt.

Oppgave 3

La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3a

Finn en ortogonal diagonalisering VDV^T av matrisen $A^T A$.

(Fortsettes på side 4.)

3b

Hva er singularverdiene til A ? Finn en singularverdi dekomposisjon $A = U\Sigma V^T$.

Oppgave 4

Betrakt vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer av grad mindre eller lik 2 og differensialoperatøren $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ gitt ved

$$(Tp)(t) = 3p(t) + tp'(t) + p''(t).$$

(Fortsettes på side 5.)

4a

Vis at T er en lineær transformasjon.

4b

Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ til T med hensyn på standardbasisen $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ med

$$\begin{aligned}p_0(t) &= 1 \\p_1(t) &= t \\p_2(t) &= t^2.\end{aligned}$$

4c

Finn alle $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at differensiallikningen

$$3p(t) + tp'(t) + p''(t) = \lambda p(t) \quad (\text{for alle } t \in \mathbb{R})$$

har en løsning $p \in \mathbb{P}_2$ som ikke er null. Finn en løsning som ikke er null for hver slik λ .

(Fortsettes på side 6.)

Husk Matlab-utskriften på neste side!

(Fortsettes på side 7.)

Matlab-utskrift.

```
>> A=[2 0 -2 4  
3 2 3 4  
1 1 2 1]
```

A =

2	0	-2	4
3	2	3	4
1	1	2	1

```
>> R=rref(A)
```

R =

1	0	-1	2
0	1	3	-1
0	0	0	0