UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2400 — Reell analyse
Eksamensdag:	Mandag, 2. juni, 2025
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

1a

La X være et metrisk rom og la $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ være en følge av kontinuerlige funksjoner $f_n : X \to \mathbb{R}$ som er slik at $|f_n(x)| < C$, der C er en positiv konstant, for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in X$. Bevis, eller finn et moteksempel på, følgende påstander:

(i)
$$F_n(x) = \max_{k \leq n} f_k(x) \text{ er kontinuerlig for alle } n \in \mathbb{N}.$$

(ii)
$$F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \text{ er kontinuerlig.}$$

1b

La $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ og $\{b_n\}_{\mathbb{N}}$ være følger av reelle, ikke-negative tall. Anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Vis at

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \limsup_{n\to\infty}(b_n) \quad \text{og} \quad \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = a \limsup_{n\to\infty}(b_n).$$

(Fortsettes på side 2.)

1c

La $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrom. Vis at for A og B i $\mathcal{A}$ så gjelder

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Oppgave 2

La X og Y være komplette normerte vektorrom, og la $A : X \to Y$ være en kontinuerlig lineæravbildning, mao. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Anta også at A er en bijeksjon med invers A^{-1}. Vi ønsker å løse ligningen

$$Ax = b, \quad \text{for } x \in X, \tag{1}$$

der b er en vektor i Y. En invertibel lineæravbildning $B : Y \to X$ kalles en *tilnærmet invers til* A dersom

$$\|I - AB\| < 1, \tag{2}$$

der I betegner identitetsavbildningen i Y[1], og $\|\cdot\|$ betegner operatornormen. La heretter B være en tilnærmet invers til A.

[1]Du kan få bruk for at (2) impliserer at $\|I_X - BA\| < 1$, der I_X er identitetsavbildningen i X. Denne implikasjonen trenger du ikke vise.

(Fortsettes på side 3.)

2a

Vis at

$$(AB)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - AB)^k,$$

og at rekka konvergerer absolutt.

2b

Anta at x løser (1), vis at

$$x = B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} (I - AB)^k\Big) b,$$

her, og i resten av oppgaven, er b den samme som i (1).

2c

Definér $T : X \to X$ ved

$$T(x) = x + B\,(b - Ax)$$

og følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ved

$$x_0 = Bb, \quad x_{n+1} = T\,(x_n) \quad n \geq 0.$$

Vis at $x_n \to x$ når $n \to \infty$, der x løser (1).

(Fortsettes på side 4.)

2d

La s_n betegne delsummene

$$s_n = B\Big(\sum_{k=0}^{n}(I - AB)^k\Big)b.$$

Vis at $s_n = x_n$ for alle n. **Hint**: Det kan være nyttig å definere $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I - AB)^k$, så $s_n = BS_nb$.

Oppgave 3

La

$$X = \left\{ u \in C([0,\infty),\mathbb{R}) \;\middle|\; \sup_{t\in[0,\infty)} |u(t)| < \infty \right\}$$

uststyrt med supremumsnormen, $\|u\|_\infty = \sup\{|u(t)| \mid t \in [0,\infty)\}$, og la $F(u)$ være gitt ved

$$F(u)(t) = e^t \int_t^\infty e^{-\tau}\sin(u(\tau))\,d\tau.$$

3a

Vis at $\|F(u)\|_\infty \leq 1$ for alle $u \in X$, og at avbildningen $t \mapsto F(u)(t)$ er deriverbar og at

$$\frac{d}{dt}F(u)(t) = F(u)(t) - \sin(u(t)).$$

(Fortsettes på side 5.)

$$F : X \to Y = \left\{ v \in X \;\middle|\; v \text{ er deriverbar og } v' \in X \right\}.$$

Med normen $\|v\|_Y := \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty$ blir Y et komplett vektorrom. Dette skal ikke vises.

3b

Finn $F'(u)r$ og vis at $F'(0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ er invertibel. **Hint**: Det kan lette regningen å skrive $F = L \circ H$ der $L : X \to Y$ er lineær.

(Fortsettes på side 6.)

3c

Det kan vises at avbildningen $v \mapsto F'(v) \in \mathcal{L}(X, Y)$ er kontinuerlig for alle $v \in X$, men du trenger ikke å vise dette.
La $v(t) = 0$ for $t \in [0, \infty)$. Vis at $F(v)(t) = 0$ og at det finnes en åpen mengde O, med $0 \in O \subset Y$, og en funksjon $G : O \to X$ som tilfredstiller

$$y(t) = F(G(y))(t) \quad \text{for } y \in O.$$

Ikke la deg forvirre av notasjonen, G er en invers til F.

SLUTT