

**Løsningsforslag til eksamen i  
STK1100 12. juni 2018**

**Oppgave 1**

Tvillingpar kan være enten eneggede eller toeggede. Sannsynligheten for at det ved en tvillingfødsel blir født eneggede tvillinger er i Nord-Europa omtrent 30%, og vi vil benytte denne sannsynligheten for enegget tvillingfødsel i denne oppgaven.

De to tvillingene i et enegget tvillingpar har alltid samme kjønn. Vi antar at sannsynligheten for to jenter ved enegget tvillingfødsel er 48.6%. Vi antar videre at ved en fødsel av toeggede tvillinger er kjønnene til den ene tvillingen uavhengig av kjønnene til den andre, og at sannsynligheten for at en bestemt av tvillingene er jente er 48.6%.

a) Hva er sannsynligheten for to jenter ved toegget tvillingfødsel?

**Løsning:**

For toegget tvillingfødsel er kjønnene til den ene tvillingen uavhengig av kjønnene til den andre. Vi har dermed at

$$\begin{aligned} P(\text{to jenter} \mid \text{toegget}) &= P(\text{første tvilling jente} \mid \text{toegget}) \cdot P(\text{andre tvilling jente} \mid \text{toegget}) \\ &= 0.486 \cdot 0.486 = 0.236 \end{aligned}$$

b) Hva er sannsynligheten for at begge tvillingene i et tvillingpar er jenter?

Hva er sannsynligheten for at én er jente og én er gutt?

**Løsning:**

Setningen om total sannsynlighet gir at

$$\begin{aligned} P(\text{to jenter}) &= P(\text{enegget}) \cdot P(\text{to jenter} \mid \text{enegget}) + P(\text{toegget}) \cdot P(\text{to jenter} \mid \text{toegget}) \\ &= 0.30 \cdot 0.486 + 0.70 \cdot 0.486^2 = 0.311 \end{aligned}$$

Tilsvarende har vi at

$$\begin{aligned} P(\text{én gutt og én jente}) &= P(\text{enegget}) \cdot P(\text{én gutt og én jente} \mid \text{enegget}) \\ &\quad + P(\text{toegget}) \cdot P(\text{én gutt og én jente} \mid \text{toegget}) \\ &= 0.30 \cdot 0 + 0.70 \cdot (2 \cdot 0.486 \cdot 0.514) = 0.350 \end{aligned}$$

c) Begge tvillingene i et tvillingpar er jenter. Hva er sannsynligheten for at de er eneggede?

**Løsning:**

Definisjonen av betinget sannsynlighet og produktsetningen gir at (jf. Bayes' setning)

$$\begin{aligned} P(\text{enegget} \mid \text{to jenter}) &= \frac{P(\text{enegget og to jenter})}{P(\text{to jenter})} = \frac{P(\text{enegget}) \cdot P(\text{to jenter} \mid \text{enegget})}{P(\text{to jenter})} \\ &= \frac{0.30 \cdot 0.486}{0.311} = 0.469 \end{aligned}$$

d) De to tvillingene i et tvillingpar har samme kjønn. Hva er sannsynligheten for at de er toeggede?

**Løsning:**

Ved å bruke punkt b, finner vi at

$$P(\text{samme kjønn}) = 1 - P(\text{én gutt og én jente}) = 1 - 0.350 = 0.650$$

Videre har vi at

$$P(\text{samme kjønn} \mid \text{toegget}) = P(\text{to jenter} \mid \text{toegget}) + P(\text{to gutter} \mid \text{toegget}) = 0.486^2 + 0.514^2 = 0.500$$

Vi finner dermed at

$$P(\text{toegget} \mid \text{samme kjønn}) = \frac{P(\text{toegget}) \cdot P(\text{samme kjønn} \mid \text{toegget})}{P(\text{samme kjønn})} = \frac{0.70 \cdot 0.500}{0.650} = 0.539$$

## Oppgave 2

Vi minner om at hvis en stokastisk variabel  $W$  er gammafordelt med formparameter  $\alpha$  og skalaparameter  $\beta$ , som vi skriver  $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ , så er sannsynlighetstettheten til  $W$  gitt ved

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-w/\beta} & \text{hvis } w > 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Her er  $\Gamma(\alpha)$  gammafunksjonen. Vi minner også om at  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  og  $\Gamma(1) = 1$ .

Anta at  $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ .

a) Vis at den momentgenererende funksjonen til  $W$  er

$$M_W(t) = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha} \quad \text{for } t < 1/\beta$$

**Løsning:**

Den momentgenererende funksjonen til  $W$  er (for  $t < 1/\beta$ )

$$\begin{aligned} M_W(t) &= E(e^{tW}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tw} f_W(w) dw = \int_0^{\infty} e^{tw} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-w/\beta} dw \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-(1-\beta t)w/\beta} dw \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left( \frac{u}{1-\beta t} \right)^{\alpha-1} e^{-u/\beta} \frac{du}{1-\beta t} \quad [\text{substituerer } u = (1-\beta t)w] \\ &= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-u/\beta} du \\ &= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \end{aligned}$$

Her følger den siste likheten av at integralet av  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ -tettheten er lik én.

b) Bruk den momentgenererende funksjonen til å bestemme forventning og varians til  $W$ .

**Løsning:**

Vi kan skrive  $M_W(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$ . Vi deriverer to ganger med hensyn på  $t$  og finner

$$M'_W(t) = -\alpha(1 - \beta t)^{-\alpha-1}(-\beta) = \alpha\beta(1 - \beta t)^{-\alpha-1}$$

$$M''_W(t) = (-\alpha - 1)\alpha\beta(1 - \beta t)^{-\alpha-2}(-\beta) = (\alpha + 1)\alpha\beta^2(1 - \beta t)^{-\alpha-2}$$

Dermed er

$$E(W) = M'_W(0) = \alpha\beta$$

og

$$V(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = M''_W(0) - (\alpha\beta)^2 = (\alpha + 1)\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$$

Anta så at  $Z$  er standardnormalfordelt, og sett  $Y = Z^2$ .

c) Vis at for  $y > 0$  er den kumulative fordelingen til  $Y$  gitt ved

$$F_Y(y) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$

der  $\Phi(z) = P(Z \leq z)$  er den kumulative standardnormalfordelingen.

**Løsning:**

Den kumulative fordelingen til  $Y$  er gitt ved (for  $y > 0$ )

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(Z^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) \\ &= P(Z \leq \sqrt{y}) - P(Z \leq -\sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

d) Bruk resultatet i punkt c til å bestemme sannsynlighetstettheten til  $Y$ , og vis at  $Y \sim \text{Gamma}(1/2, 2)$ .

**Løsning:**

La  $\phi(z)$  være tettheten for standardnormalfordelingen. Da er  $\phi(z) = \Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ .

Vi har nå at tettheten til  $Y$  er gitt ved (for  $y > 0$ )

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = \phi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} - \phi(-\sqrt{y})\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{y})^2/2}\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(-\sqrt{y})^2/2}\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{y})^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2} \end{aligned}$$

Ved å bruke at  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , ser vi at tettheten til  $Y$  kan skrives på formen

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}y^{1/2-1}e^{-y/2}$$

Ved å sammenligne dette uttrykket med  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ -tettheten, ser vi at  $Y$  er gammafordelt med formparameter  $\alpha = 1/2$  og skalaparameter  $\beta = 2$ .

### Oppgave 3

La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige normalfordelte variabler med kjent forventning  $\mu_0$  og ukjent varians  $\sigma^2$ . En estimator for  $\sigma^2$  er

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$$

a) Vis at  $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \text{Gamma}(n/2, 2)$ . (*Vink:* Bruk resultatet i oppgave 2d, og husk at en sum av uavhengige gammafordelte variabler som alle har samme skalaparameter, selv er gammafordelt.)

#### Løsning:

La  $Z_i = (X_i - \mu_0)/\sigma$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Da er  $Z_i$ -ene uavhengige og standardnormalfordelte. Vi finner at

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

Ved resultatet i oppgave 2d er  $Z_i^2 \sim \text{Gamma}(1/2, 2)$ . Videre er en sum av uavhengige gammafordelte variabler som alle har samme skalaparameter, selv gammafordelt med en formparameter som er summen av formparameterne. Det følger at  $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \text{Gamma}(n/2, 2)$ .

b) Vis at  $\hat{\sigma}^2$  er en forventningsrett estimator for  $\sigma^2$  og bestem  $V(\hat{\sigma}^2)$ . Er  $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$  en forventningsrett estimator for  $\sigma$ ?

#### Løsning:

Av resultatet i forrige punkt og oppgave 2b (med  $\alpha = n/2$  og  $\beta = 2$ ) har vi at

$$E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n}{2} \cdot 2 = n$$
$$V\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n}{2} \cdot 2^2 = 2n$$

Vi får dermed at

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^2}{n} E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot n = \sigma^2$$

Altså er  $\hat{\sigma}^2$  en forventningsrett estimator for  $\sigma^2$ . Videre er

$$V(\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 V\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}$$

Vi kan ikke bytte om rekkefølgen av forventning og kvadratro, så

$$E(\hat{\sigma}) = E\left(\sqrt{\hat{\sigma}^2}\right) \neq \sqrt{E(\hat{\sigma}^2)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

Derfor er ikke  $\hat{\sigma}$  en forventningsrett estimator for  $\sigma$ .

c) Utled et 95% konfidensintervall for  $\sigma$ . Intervallet skal uttrykkes ved hjelp av  $n$ ,  $\hat{\sigma}$ ,  $a$  og  $b$ . Her er  $a$  og  $b$  henholdsvis 2.5% og 97.5% persentilene for gammafordelingen med formparameter  $n/2$  og skalaparameter 2.

**Løsning:**

Vi har at

$$P\left(a \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 0.95$$

Vi omformer ulikhetene og finner at dette er det samme som

$$P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{a}\right) = 0.95$$

Vi tar så kvadratroten og finner (siden  $\sqrt{x}$  er en strengt voksende funksjon for  $x > 0$ )

$$P\left(\sqrt{\frac{n}{b}}\hat{\sigma} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{n}{a}}\hat{\sigma}\right) = 0.95$$

Altså er intervallet

$$\left[\sqrt{\frac{n}{b}}\hat{\sigma}, \sqrt{\frac{n}{a}}\hat{\sigma}\right]$$

et 95% konfidensintervall for  $\sigma$ .

Seks voltmetere ble testet med en spenning på nøyaktig 50 volt og ga følgende resultat:

50.4    49.3    50.5    49.0    49.7    50.1

Vi antar at målingene er uavhengige og normalfordelte med forventning 50 volt og ukjent standardavvik  $\sigma$ .

d) Gi et estimat for standardavviket. Bestem også et 95% konfidensintervall for  $\sigma$ . Det opplyses at 2.5% og 97.5% persentilene i gammafordelingen med formparameter 3 og skalaparameter 2 er henholdsvis 1.24 og 14.45.

**Løsning:**

Et estimat for  $\sigma^2$  er

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{6} [(50.4 - 50)^2 + (49.3 - 50)^2 + (50.5 - 50)^2 + (49.0 - 50)^2 + (49.7 - 50)^2 + (50.1 - 50)^2] \\ &= \frac{1}{6} [0.4^2 + (-0.7)^2 + 0.5^2 + (-1.0)^2 + (-0.3)^2 + 0.1^2] \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2.0 = \frac{1}{3} = 0.333 \end{aligned}$$

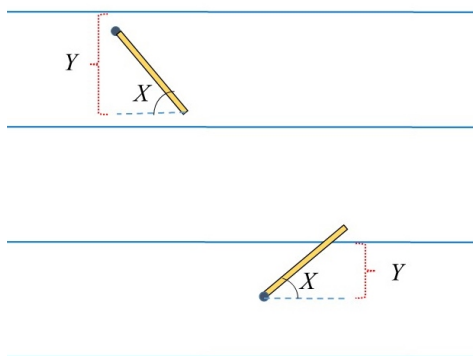
Et estimat for  $\sigma$  er dermed  $\hat{\sigma} = \sqrt{1/3} = 0.577$ . Et 95% konfidensintervall for  $\sigma$  er gitt ved

$$\left[\sqrt{\frac{6}{14.45}} \cdot 0.577, \sqrt{\frac{6}{1.24}} \cdot 0.577\right]$$

dvs. [0.372, 1.270].

## Oppgave 4

På et ark er det tegnet flere parallelle linjer. Avstanden mellom linjene er  $d = 4.8$  cm, som er lik lengden av en fyrstikk. En fyrstikk kastes tilfeldig på arket. La  $X$  være vinkelen fyrstikken danner med de parallelle linjene (i radianer), og la  $Y$  være avstanden fra den nederste enden av fyrstikken til linja ovenfor (i cm). Figuren nedenfor viser to mulige utfall av forsøket og definisjonene av  $X$  og  $Y$ . (På figuren krysser den nederste fyrstikken en av de parallelle linjene, mens den øverste ikke gjør det.)



Vi får en modell for et tilfeldig fyrstikkast ved å anta at  $X$  og  $Y$  har simultan tetthet

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2/(\pi d) & \text{for } 0 < x < \pi/2 \text{ og } 0 < y < d \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Bestem de marginale sannsynlighetstetthetene til  $X$  og  $Y$ . Er  $X$  og  $Y$  uavhengige?

**Løsning:**

For  $0 < x < \pi/2$  er den marginale tettheten til  $X$  gitt ved

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^d \frac{2}{\pi d} dy = \frac{2}{\pi d} \cdot d = \frac{2}{\pi}$$

For  $x \leq 0$  og  $x \geq \pi/2$  er  $f_X(x) = 0$ . Altså er  $X$  uniformt fordelt over  $(0, \pi/2)$ .

For  $0 < y < d$  er den marginale tettheten til  $Y$  gitt ved

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi d} dx = \frac{2}{\pi d} \cdot (\pi/2) = \frac{1}{d}$$

For  $y \leq 0$  og  $y \geq d$  er  $f_Y(y) = 0$ . Altså er  $Y$  uniformt fordelt over  $(0, d)$ .

For  $0 < x < \pi/2$  og  $0 < y < d$  har vi at

$$f_{XY}(x, y) = \frac{2}{\pi d} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{d} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

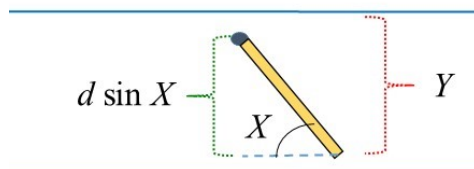
For  $x \notin (0, \pi/2)$  og  $y \notin (0, d)$  har vi at  $f_{XY}(x, y) = 0 = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ .

Altså er  $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$  for alle  $x, y$ , så  $X$  og  $Y$  er uavhengige.

**b** Forklar at fyrstikken vil krysse en av de parallelle linjene så sant  $d \sin X > Y$ , og vis at  $P(d \sin X > Y) = 2/\pi$ . (*Vink:* Husk at sinus til en vinkel i en rettvinklet trekant er forholdet mellom motstående katet og hypotenusen. Husk også at  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$ .)

**Løsning:**

Den vertikale avstanden fra nedre til øvre ende av fyrstikken er  $d \sin X$ . Så fyrstikken vil krysse en linje hvis  $d \sin X > Y$ . Se figuren nedenfor.



Vi finner at

$$\begin{aligned}
 P(d \sin X > Y) &= \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^{d \sin x} \frac{2}{\pi d} dy \right] dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{2}{\pi d} \cdot y \right]_0^{d \sin x} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$